M－B

2022年度入学試験問題

数　学

（９０分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子は開かないでください。

2. この問題冊子は3ページあります。試験中、ページの脱落等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
解答用紙の汚れなどに気づいた場合も、同様に知らせてください。

3. 監督者の指示に従って、解答用紙（3枚）それぞれに受験番号、氏名を記入してください。

4. 解答は、すべて解答用紙の指定箇所に記入してください。

5. 筆記用具以外は、使用しないでください。

6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

2022 年度入学試験問題

数　　学

（９０分）

問題は次のページです

〔 I 〕　この問題については, 解答用紙の所定の欄に答えだけを書きなさい.

(1)　関数 $f(x) = 2\sin^2 x - \cos^2 2x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値と, 最大値をとるときの x の値を求めなさい.

(2)　2^{2022} の桁数と最高位の数字を求めなさい.
ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

(3)　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = a, \quad a_n = \frac{9a_{n-1} - 10}{a_{n-1} + 2} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

数列 $\{a_n\}$ が公差 0 の等差数列であるような定数 a の値をすべて求めなさい.

(4)　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3} - i}\right)^{2022}$ を計算しなさい. ただし, i は虚数単位とする.

〔 II 〕　1枚の硬貨を5回続けて投げる. n 回目に表が出たら $a_n = 1$, 裏が出たら $a_n = 0$ とし,

$$a = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} + \frac{a_5}{32}$$

とする. さらに, $b_n = |a_n - a_{n+1}|$ $(1 \leqq n \leqq 4)$ とし,

$$b = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{8} + \frac{b_4}{16}$$

とする.

(1)　1回目, 2回目, 3回目に表が出て, 4回目, 5回目に裏が出たときの a, b それぞれの値を求めなさい.

(2)　$\dfrac{7}{32} \leqq a \leqq \dfrac{1}{4}$ となる確率を求めなさい.

(3)　表がちょうど2回出て, かつ $16b$ を4で割った余りが1である確率を求めなさい.

〔 III 〕　原点をOとする座標平面上に点 $\mathrm{P}\,(a, b)$, 点 $\mathrm{Q}\,(5a - b, -a + 5b)$ があり, 点Pは点Oを中心とする半径1の円周上を動く.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が平行であるときの点Pの座標を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直にならないことを示しなさい.

〔 IV 〕　a は正の定数とする．関数 $f(x)=\dfrac{ax-3}{x^2}-4\ (x>0)$ は極大値 $\dfrac{4}{3}$ をとる．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい．

(2)　定数 a の値を求めなさい．

(3)　関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸の表を作成し，それをもとにグラフの概形を描きなさい．

〔 V 〕　θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．座標平面の原点を O とし，点 $(0,1)$ を A とする．楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $y=\dfrac{\tan\theta}{2}x$ の交点のうち，第 1 象限にあるものを B とする．点 A と点 B を結ぶ楕円 C の一部のうち，短い方を C' とする．

(1)　点 B の座標を θ で表しなさい．

(2)　線分 OA, OB および C' で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい．