

平成 28 年度入学試験問題

数 学

(90 分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子は開かないでください。
2. この問題冊子は6ページあります。試験中、ページの脱落等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
解答用紙(マークシート)の汚れなどに気づいた場合も、同様に知らせてください。
3. 解答用紙(マークシート)は折り曲げたり、汚したりしないでください。
4. 解答は、すべて解答用紙(マークシート)に記入し、解答用紙(マークシート)の枠外には、なにも書かないでください。
5. **試験問題は、問題記号ア〜ルで41問あります。**
解答用紙(マークシート)には、問題記号がア〜ンまで印刷されています。解答にあたっては、問題記号ア〜ルの範囲内で該当する解答欄に解答してください。
6. 解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。
ただし、問題冊子を開いてはいけません。
7. マークは必ず HB の黒鉛筆を使用し、訂正する場合は、完全に消してからマークしてください。
8. 監督者の指示に従って、解答用紙(マークシート)に受験番号、氏名を記入するとともに、受験番号をマークしてください。
9. 受験番号、解答が正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
10. 筆記用具以外は、使用しないでください。
11. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

(I)

$$(1) \quad \frac{4x^2 + x + \boxed{\text{ア}}}{(x^2 - 4)(x + 1)} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{x + 2} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{x - 2} - \frac{3}{x + 1}$$

$$(2) \quad x = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5} - 2) \text{ のとき, } \frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \boxed{\text{エ}} \text{ である.}$$

$$(3) \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \pi < \beta < \frac{3}{2}\pi \text{ とする. } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \tan \beta = 3 \text{ のとき,}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}} \text{ である.}$$

$$(4) \quad \int_{-1}^1 (x + |3x + 2|) dx = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

$$(5) \quad 280 \text{ 以下の正の整数で, } 280 \text{ と互いに素であるものは全部で } \boxed{\text{ケ}} \text{ 個ある.}$$

[II]

(1) 1から9までの数を1つずつ書いた9枚のカードの中から4枚のカードを選び、カードの数の小さい方から順に a, b, c, d とおく.

(a) $a = 1$ である選び方は全部で 通りある.

(b) $a + b + c + d$ が偶数である選び方は全部で 通りある.

(c) $a + d = b + c$ である選び方は全部で 通りある.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. 数列 $\{a_n\}$ は以下の条件で定められている.

$$a_1 = S_1 = 3, \quad a_n = \frac{S_n^3 - S_{n-1}S_n^2 - 6S_{n-1}S_n}{S_n^2 + 4} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$(a) \quad S_n = \frac{2S_{n-1}}{\boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}} S_{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(b) 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 3,$$

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{(\boxed{\text{タ}} n + \boxed{\text{チ}})(\boxed{\text{タ}} n + \boxed{\text{ツ}})} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で定められる数列である. ただし, $\boxed{\text{タ}}$ は正の数であり, $\boxed{\text{タ}}$ と $\boxed{\text{チ}}$ は互いに素であり, $\boxed{\text{チ}} < \boxed{\text{ツ}}$ である.

[III]

(1) 定数 p, q, r に対して

$$\begin{aligned} \int_p^r (x-p)(x-q)(x-r)dx &= \int_p^r x(x-p)(x-r)dx - q \int_p^r (x-p)(x-r)dx \\ &= \frac{1}{\boxed{\text{テ}}} (p-r) \boxed{\text{ト}} (p + \boxed{\text{ナ}} q + r) \end{aligned}$$

(2) a を定数とし、曲線 $C: y = x^3 - 3x^2$ と直線 $l: y = 9x + a$ が異なる 3 点で交わっている。

(a) a の範囲は $\boxed{\text{ニ}} < a < \boxed{\text{ヌ}}$ である。

(b) C と l の交点を x 座標が小さい順に P, Q, R とし、これらの x 座標をそれぞれ p, q, r とする。3 次方程式 $x^3 - 3x^2 = 9x + a$ の解が p, q, r であることから $x^3 - 3x^2 - 9x - a = (x-p)(x-q)(x-r)$ が成り立つ。したがって $p+q+r = \boxed{\text{ネ}}$ である。

(c) 線分 PQ と C で囲まれた図形の面積を S_1 、線分 QR と C で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき、 $S_1 = S_2$ となるのは $a = \boxed{\text{ノ}}$ のときである。またこのとき、 $S_1 = \boxed{\text{ハ}}$ である。

[IV]

(1)

(a)

$$(\sin x - \sqrt{3} \cos x)^2 = \boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}} \sin 2x + \boxed{\text{ヘ}} \cos 2x + \boxed{\text{ホ}}$$

(b) 関数

$$y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 2\sqrt{2} \sin x - 2\sqrt{6} \cos x + 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

は $x = \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}} \pi, \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{ミ}}} \pi$ で最大値 $\boxed{\text{メ}}$ をとる.

ただし, $\boxed{\text{マ}} < \boxed{\text{ム}}$ とする.

(2) 四面体 OABC において

$$OA = 1, OB = \sqrt{5}, OC = \sqrt{6}$$
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1, \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 3, \vec{OC} \cdot \vec{OA} = -1$$

である. $\triangle OAB$ の重心を G とし, G から直線 OC に垂線 GD を下ろす.

(a) $\triangle ABC$ の面積は である.

(b) $\vec{OD} = \frac{1}{\text{ヤ}} \vec{OC}$

(c) 点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす. $\vec{OH} \perp \vec{AB}, \vec{OH} \perp \vec{AC}$ より,

$$\vec{OH} = \frac{1}{18} \left(\text{ユ} \vec{OA} + \text{ヨ} \vec{OB} + \text{ラ} \vec{OC} \right)$$

である.

(d) 四面体 DABC の体積は $\frac{\text{リ}}{\text{ル}}$ である.

解答上の注意

問題の文中の などには数値が入ります。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

1. 解答欄の各桁の該当する数字の欄にマークしてください。
2. 解答が負数の場合のみ符号欄にマークしてください。

3. 分数形 $\frac{\text{}}{\text{}}$ の部分では、既約分数(それ以上約分できない分数)で表し、

分母は必ず正とします。また、この形で整数を表すときには、分母を1とします。

4. 根号の中は、正の整数であって、2以上の整数の平方で割り切れないものとします。

解答記入例： に-5と解答する場合

符号	10 の 桁										1 の 桁									
エ	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩

に57と解答する場合

符号	10 の 桁										1 の 桁									
カ	⊖	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	⑤	⑥	●	⑧	⑨	⑩

解答表示例

$\frac{\text{}}{\text{}}$ に $-\frac{3}{2}$ を当てはめる場合には $\frac{\text{}}{\text{}}$ 、0の場合には

$\frac{\text{}}{\text{}}$ とします。

$\frac{\text{}}{\text{}}$ $\sqrt{\text{}}$ に $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を当てはめる場合には

$\frac{\text{}}{\text{}}$ $\sqrt{\text{}}$ とします。

$\text{}x^3 + \text{}x^2 + \text{}x + \text{}$ に $-x^3 - x + 1$ を当てはめる場合には $\text{}x^3 + \text{}x^2 + \text{}x + \text{}$ とします。