

講義ノート

九州非線形偏微分方程式・冬の学校

2008年11月(20日) 21日, 22日

「九州大学箱崎キャンパス 工学部本館3F10番講義室」

序

九州非線形偏微分方程式・冬の学校は、2008年11月21日(金)、22日(土)の両日、九州大学箱崎キャンパス工学部本館3F10番講義室で開催されるものです。また前日の木曜日には冬の学校のための予備講義も行われます。受講される方の便宜のため、予備講義も含めた講義内容をこの講義ノートとして作成しました。執筆してくださった講師の方々にここに厚くお礼申し上げます。

この冬の学校は基盤研究(B)課題番号18340040 (代表 川島秀一)、基盤研究(B)課題番号19340033 (代表 隠居良行)、および文部科学省グローバルCOEプログラム九州大学大学院数理学府「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」の援助のもとで開催されます。

2008年11月

組織委員:

栄 伸一郎 (九州大学)

西畑 伸也 (東京工業大学)

隠居 良行 (九州大学)

中村 徹 (九州大学)

上田 好寛 (東北大学)

九州非線形偏微分方程式・冬の学校 プログラム

「九州大学箱崎キャンパス 工学部本館3F10番講義室」

予備講義

11月20日(木)

13:00 - 15:30

栄 伸一郎(九州大)

常微分方程式の基礎とその応用 p. 1

15:50 - 18:20

瀬片 純市(福岡教育大)

フーリエ変換入門 p. 19

冬の学校

11月21日(金)

10:00 - 11:30, 13:10 - 14:40

中村 健一(電通大)

双安定型反応拡散方程式に現れる進行波解 p. 31

15:00 - 18:00

小澤 徹(早稲田大)

非線型シュレディンガー方程式の数学解析 p. 62

11月22(土)

10:00 - 11:30, 13:10 - 14:40

倉田 和浩(首都大)

パターン形成問題における定常解の構成について p. 69

15:00 - 18:00

松村 昭孝(大阪大)

一次元圧縮性粘性流体の長時間挙動 p. 92

メモ

常微分方程式の基礎とその応用

栄 伸一郎 (九州大学大学院数理学研究院)

1 はじめに

この講義ノートでは冬の学校で行われる各講演を理解するために必要な、常微分方程式に関する最低限の知識のみを証明無しに紹介する。より詳しく知りたい読者は、たとえば [5]などを参照されたい。

また、本原稿では簡単のため、特に断らない限り、関数はすべて変数に関して滑らかとする。ここで滑らかとは、必要なだけ微分することができることを意味するものとする。また、時間発展する現象を意識して、独立変数は t を用いる。

最後に、 $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を表し、 $\mathbf{R}^N$ とある場合は、 N は自然数で $\mathbf{R}^N$ は N 次元の実ベクトル空間を表すものとする。

2 常微分方程式の例

$u = u(t)$ を t に関して滑らかな 1 変数関数とすると、その 1 階導関数を u' , $\dot{u}$ や $\frac{du}{dt}$ などと表す。高階導関数に対しても同様に $u^{(n)}$ や $\frac{d^n u}{dt^n}$ などと表す。関数 $u = u(t)$ に対して u およびその導関数 $u', u'', \dots, u^{(n)}$ の間の関係式 $f(u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$ を (常)微分方程式という。いくつかの例を示そう。

例 1 (自由落下)。

質量 m の質点が自由落下するとする。このとき、落下し始めてから t 時刻後の質点の高さを $h(t)$ とすると、ニュートンの第 2 法則により $m\ddot{h} = -mg$ をみたす。ここで、 g は重力加速度である。これは最も簡単な微分方程式の例であり、この微分方程式を満たす関数 $h(t)$ は $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$ と求めることができる。定数 a と b は、初期条件と呼ばれる、ある時刻 $t = t_0$ における質点の状態によって決まる。今の場合、自由落下であるから、初期速度 $\dot{h}(0) = 0$ 、および $t = 0$ における高さ ($h(0) = h_0$ とする) から $a = 0$, $b = h_0$ となる。すなわち $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$ である。

例 2 (放射性物質の崩壊、および古典人口論)

ウランなどの放射性物質は時間と共に自然に崩壊し、徐々にその質量が減少していく。

その崩壊の様子は、時刻 t における物質の質量を $u(t)$ とすると

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = -\alpha u$$

で表されることが知られている．すなわち、ある瞬間における質量の変化量 (崩壊量) $\frac{du}{dt}$ はその瞬間における物質の質量に比例するというものであり、 α は崩壊定数と呼ばれる正定数である．

一方、 $u = u(t)$ をある瞬間における細胞数、あるいは人口とすると (本来は自然数ではないといけませんが、十分多くの数を対象とするときは、近似的に連続量とみなすことができる) 理想的な環境下では (1) と同様の式

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = \alpha u$$

で記述できると考えられている．これは、ある瞬間における変化量 (個体数増加量) がその瞬間における細胞数に比例するというものであり、**マルサスの法則**と呼ばれている．この場合、 α は増殖率に対応する正定数である．

(1) と (2) は全く異なる対象を扱っているにもかかわらず、比例定数の符号を除いて同じ形の方程式で表されており、数学的には完全に同等である．

例 3 (ロジスティック方程式)

関数 $u(t) = ae^{\alpha t}$ ($a > 0$) が (2) をみたすことは容易に確認することができる．すなわち細胞数は指数関数的に増加することを意味する．しかし、細胞数がある程度増加すると環境の悪化などにより、増加の割合が鈍ると考える方がより現実的である．そこで (2) の増殖率 α が個体数 $u(t)$ の増加と共に減少するとして、 $\alpha = \beta - \gamma u$ (β, γ は正定数) とおいた方程式

$$(3) \quad \frac{du}{dt} = (\beta - \gamma u)u$$

を**ロジスティック方程式**という．この方程式と初期条件 $u(0) = u_0$ を満たす関数は

$$(4) \quad u(t) = \frac{\beta u_0 e^{\beta t}}{\beta + \gamma u_0 (e^{\beta t} - 1)}$$

となる．この関数を見つけるにはあとで紹介する、変数分離形に対する初等解法を用いる．

増殖率 α が正定数のときは $u(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で $u(t) = ae^{\alpha t} \rightarrow \infty$ となるが、ロジスティック方程式 (3) の場合は (4) より $u(t) \rightarrow \frac{\beta}{\gamma}$ となる．

例 4 (化学反応系)

化学反応式 $mX + nY \xrightarrow{k} Z$ (k は反応速度) で進行する化学反応があるとする．このと

き 各物質 X, Y, Z の時刻 t における濃度をそれぞれ $x(t), y(t), z(t)$ とおくと満たすべき微分方程式は

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} &= -kx^m y^n, \\ \dot{y} &= -kx^m y^n, \\ \dot{z} &= kx^m y^n \end{cases}$$

となる．これは質量作用の法則に基づいて導かれる．(5) のように未知関数が複数ある微分方程式は**連立微分方程式**，あるいは**常微分方程式系**と呼ばれる．

例 5 (2 種競合系)

同じ生息領域に 2 種の生物が，ほぼ同じ食物を巡って競合関係にある様子を記述したモデルとして，

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{u} &= (a_1 - b_1 u - c_1 v)u, \\ \dot{v} &= (a_2 - b_2 v - c_2 u)v \end{cases}$$

がある．ただし， $u(t), v(t)$ は各種の時刻 t における個体数であり，係数はすべて正定数とする．これを**ロトカ・ボルテラ方程式**という．方程式の意味を考えるためには，たとえば (6) の第 1 式において $v \equiv 0$ としてみればよい．それは (3) のロジスティック方程式になることから，種内間競合により， u の増殖率は u 自身が増えるほど減少することが分かる．更に v が存在すると， u の増殖率がその分，更に減少するということから， u, v の異種間でも競合があることを示している． v についても同様である．

一方，(6) において係数の符号を変えれば，また異なった意味の方程式系になる．たとえば， $c_1 < 0$ ，他は正とすると， u は v が多いほど増殖率が増加することから， u が v を捕食しているモデルとなる．更に $c_2 < 0$ であれば，一方の存在がもう一方の生存を助けることから共生モデルとなる．

3 常微分方程式の初等解法

以降， $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ などの表記は実係数の N 次元縦ベクトル (列ベクトル) を意味し，成分表示するときは $\mathbf{u} = {}^t(u_1, \dots, u_N)$ などと表すものとする．

前節で常微分方程式 (系) の例をいくつか見てきたが，それらはいずれも

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = F(t, \mathbf{u}), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$$

の形に帰着できる (N は自然数)．実際，(2) や (3) はそのまま $\mathbf{u} = u$ と思えばよいし，(5) や (6) はそれぞれ $\mathbf{u} = {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ または $\mathbf{u} = {}^t(u, v) \in \mathbf{R}^2$ とすればよい．

一方，例 1 のような，一般に高階の微分を含む

$$(8) \quad u^{(n)} = f(u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

の形の微分方程式の場合は, $v_1 = u$, $v_2 = u'$, $\dots$, $v_n = u^{(n-1)}$ とおくことにより連立の 1 階微分方程式系

$$(9) \quad \begin{cases} v_1' = v_2, \\ v_2' = v_3, \\ \vdots \\ v_n' = f(v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases}$$

となり, やはり (7) の形の微分方程式に帰着される. (7) の形に帰着される微分方程式を**正規形**といい, そうでない微分方程式を**非正規系**という. 微分方程式に対する基本的な性質, 解の存在や一意性など, は正規形の方程式に対して成り立つ性質であり, 非正規系の方程式に対しては一般に期待できない. 本書では (7) のタイプの, 正規形の微分方程式のみを扱うことにする.

(7) に**初期条件**

$$(10) \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$$

を加えたものを**初期値問題**あるいは**コーシー問題**という. 初期条件などの与えられた条件と微分方程式を満たす関数を見つけることを**微分方程式を解く**といい, 満たす関数を**微分方程式の解**という.

定理 1 (初期値問題の解の存在と一意性)

(7) で F が $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ に関して滑らかな関数ならば初期値問題 (7), (10) の解は存在してただ一つである.

注 1 定理 1 において, 実際は F はそれほど滑らかである必要はなく, リプシッツ条件と呼ばれる, 連続よりは若干強い条件が満たされていれば十分である. また, F の定義域が限定されている場合は, その定義域の範囲内でのみ考えることになる. しかし本書では簡単のため, F は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ 全体で滑らかとして話を進める.

注 2 初期条件を課さない場合, (7) の解は $\mathbf{u}(t) = U(t; c_1, \dots, c_N)$ という, 最大 N 個の任意定数を含んだ形で求められる. これを**一般解**という.

変数分離形

1 階の正規形微分方程式 $u' = f(t, u)$ において右辺が $f(t, u) = g(t)h(u)$ という形に表されているとき**変数分離形**であるという. この場合, 方程式を $\frac{u'}{h(u)} = g(t)$ とし, 両辺積分することにより

$$(11) \quad \int \frac{du}{h(u)} = \int g(t)dt + C$$

なる. 実際にこの方法を用いていくつか例題を解いてみる.

例 6 (2) を初期条件 $u(0) = u_0$ の下で解いてみる. (2) は明らかに変数分離形であるから, (11) により $\int \frac{du}{u} = \int \alpha dt + C$, すなわち $\log u = \alpha t + C$ から $u(t) = e^C e^{\alpha t}$ となる. e^C をあらためて c とおくことにより, 任意定数をつつだけ含む一般解 $u(t) = ce^{\alpha t}$ を得る. 最後に初期条件 $u(0) = u_0$ より $c = u_0$ となり, 初期値問題の解として $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$ を得る.

例 7 (3) を解いてみる. (11) より $\int \frac{du}{(\beta - \gamma u)u} = \int dt + C$ となるから, 左辺を求めると

$$\int \frac{du}{(\beta - \gamma u)u} = \frac{1}{\beta} \int \left(\frac{1}{u} + \frac{\gamma}{\beta - \gamma u} \right) du = \frac{1}{\beta} \log \frac{u}{\beta - \gamma u}$$

となり, 結局

$$(12) \quad \frac{u}{\beta - \gamma u} = ce^{\beta t} \quad (c = e^{\beta C})$$

を得る. ここで $t = 0$ とすると, $u(0) = u_0$ より

$$(13) \quad c = \frac{u_0}{\beta - \gamma u_0}$$

となる. (12), (13) より (4) を得る.

定数係数線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = f(t)$$

の形の微分方程式を n 階定数係数線形微分方程式という. ただし, a_j は定数であり, $f(t) \equiv 0$ のときを同次方程式, $f(t) \neq 0$ のときを非同次方程式という. 一般の場合の解法については常微分方程式の専門書に譲ることにして, ここでは2階の微分方程式

$$(14) \quad y'' + ay' + by = f(t) \quad (a, b \text{ は定数})$$

のみを考えることにする. (14) を満たす関数が見つかったとし, それを $y_0(t)$ とおく. また, (14) の同次方程式

$$(15) \quad y'' + ay' + by = 0$$

の, 2つの任意定数 c_1, c_2 を含む一般解 $y(t) = y(t; c_1, c_2)$ が求めたとすると, それらを足しあわせた関数 $y(t) = y_0(t) + y(t; c_1, c_2)$ も (14) を満たすことは容易に確認できる. 実は (14) を満たす関数は必ずこの形に表されることが知られている. 従って, (14) を解くためには, 同次方程式 (15) の一般解と (14) を満たす関数をつつ見つければよいことになる. そこで, 以下ではまず同次方程式 (15) の一般解を求めるための方法を紹介する.

$D = \frac{d}{dt}$ とおくと (15) は形式的に $D^2y + aDy + by = 0$ と表される. これを更に $(D^2 + aD + b)y = 0$ とする. この形に対応して, $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を**特性方程式**という. 特性方程式の2つの解を λ_1, λ_2 とすると, $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ と因数分解されるから $D^2 + aD + b = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$ となり (15) は $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0$ と表される. そこで $(D - \lambda_1)y = 0$ と $(D - \lambda_2)y = 0$ を満たす解をそれぞれ $y_1(t), y_2(t)$ とすると $y_1(t), y_2(t)$ は明らかに (15) を満たす. したがって, それらの和 $y_1(t) + y_2(t)$ も (15) を満たす. 微分方程式 $(D - \lambda_j)y = 0$ は $y' - \lambda_j y = 0$ であるから変数分離形で, 例6より $y_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}$ となる.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき:

一般解は2つの任意定数を含む $y(t) = y(t; c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ で与えられる.

2) $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき:

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ とする. $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ と $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ は定数倍を除いて同じ関数であるから $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = (c_1 + c_2) e^{\lambda_0 t} = c e^{\lambda_0 t}$ となり, 本質的に任意定数を一つしか含み得ないため, これだけでは一般解にならない. そこで関係式 $e^{-\lambda_0 t}(D - \lambda_0)y = D(e^{-\lambda_0 t}y)$ を用いる. この式の成立は容易に確認することができる. 今の場合, (15) は $(D - \lambda_0)^2 y = 0$ と表されるから, 両辺に $e^{-\lambda_0 t}$ を掛けると

$$0 = e^{-\lambda_0 t}(D - \lambda_0)^2 y = D(e^{-\lambda_0 t}(D - \lambda_0)y) = D^2(e^{-\lambda_0 t}y)$$

となり, 2回積分することにより $e^{-\lambda_0 t}y(t) = c_1 + c_2 t$, したがって $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_0 t}$ を得る. これが一般解である.

次に非同次方程式 (14) を満たす関数の一つを見つけるための方法を紹介する. (15) の特性方程式の解を λ_1, λ_2 とすると (14) は $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = f$ と表される. 両辺に $e^{-\lambda_1 t}$ を掛けて関係式 $e^{-\lambda_1 t}(D - \lambda_1)y = D(e^{-\lambda_1 t}y)$ を用いると $D(e^{-\lambda_1 t}(D - \lambda_2)y) = e^{-\lambda_1 t}f(t)$ となる. したがって1回積分して (一つ見つければいだけだから, 積分定数はすべて0として十分である) $e^{-\lambda_1 t}(D - \lambda_2)y = \int^t e^{-\lambda_1 s} f(s) ds$ を得る. すなわち

$(D - \lambda_2)y = e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} f(s) ds$ である. この両辺に再び $e^{-\lambda_2 t}$ を掛けて同様に積分すれば, 非同次方程式 (14) を満たす関数を得るが煩雑のため一般形は書かない.

この方法により, 必ず関数の一つを見つけることができるが, 通常は方程式からもっと易しく見つけることができる場合が多い.

例 8 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 1$ の一般解を求める. まず同次方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ に対して, その特性方程式は $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ であるから一般解は $y(t; c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ である.

次に非同次方程式を満たす一つの解は $y(t) = a$ とおいて代入すると $2a = 1$ より $a = 1/2$, すなわち $y_0(t) = 1/2$ が非同次方程式を満たす一つの関数である. したがって一般解は $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 1/2$ と求められる.

例 9 微分方程式 $y'' - 2y' + y = t$ の一般解を求める. 同次方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ は $(D - 1)^2 y = 0$ よりその一般解は $y(t; c_1, c_2) = (c_1 + c_2 t)e^t$ である. 次に非同次方程式

を満たす一つの関数を見つける. $(D-1)^2 y = t$ であるから両辺に e^{-t} を掛けると

$$te^{-t} = e^{-t}(D-1)^2 y = D(e^{-t}(D-1)y) = D^2(e^{-t}y)$$

となる. したがって 2 回積分して

$$e^{-t}y(t) = \int \int te^{-t}dt = \int (te^{-t} + e^{-t})dt = te^{-t} + 2e^{-t}$$

となるから $y_0(t) = t+2$ を得る. 以上より非同次方程式の一般解は $y(t) = (c_1 + c_2t)e^t + t+2$ である.

定数係数線形微分方程式の初期値問題

(14) に初期条件 $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ を課するとき, 一般解 $y(;c_1, c_2) + y_0(t)$ が初期条件を満たすように任意定数 c_1, c_2 を決めるという作業が必要になる. ここでは一般解を経由することなく, 初期値問題を解くための方法を紹介する. 簡単のため 2 階の微分方程式のみを扱う.

2 階の定数係数線形微分方程式は $\mathbf{u} = {}^t(x, y) \in \mathbf{R}^2$, A を 2 次の正方行列として

$$(16) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$$

の定数係数連立微分方程式系の形に帰着できる. そこで (16) に対して初期値

$$(17) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

を満たす解を求めることにする.

ところで $u \in \mathbf{R}$ の場合 (16) に対応する初期値問題は (2), $u(0) = u_0$ であるが, これは例 6 から解は $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$ であった. その右辺はテーラー展開

$$u_0 e^{\alpha t} = u_0 \left(1 + \alpha t + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 + \cdots \right)$$

を持つ. そこで (16) に対しても同様に行列の無限級数

$$(18) \quad I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n A^n + \cdots$$

を考え, これを形式的に e^{tA} と表すことにする. これを**行列の指数関数**という. ただし, I は 2 次の単位行列である. e^{tA} は 2 次の正方行列の和で定義されているから (その極限があるとする) やはり 2 次の正方行列である. これに初期値 $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{R}^2$ を作用させたもの $\mathbf{u}^*(t) = e^{tA}\mathbf{u}_0$ は初期値問題 (16), (17) の解であることを見てみよう. e^{tA} の定義 (18) より $e^{0A} = I$ である. したがって $\mathbf{u}^*(0) = e^{0A}\mathbf{u}_0 = I\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0$ となり初期条件 (17) を満たす. 次に微分方程式 (16) であるが, やはり定義 (18) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= A + tA^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \cdots \\ &= A(I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n A^n + \cdots) = Ae^{tA} \end{aligned}$$

が成り立つから $\frac{d}{dt}\mathbf{u}^*(t) = \frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{u}_0 = Ae^{tA}\mathbf{u}_0 = A\mathbf{u}^*(t)$ となり, (16) が満たされることが分かる. このように初期値問題 (16), (17) を解くためには e^{tA} を求めればよいことが分かる. なお, 定義式 (18) の無限級数の収束性に関しては他書を参考にされたい.

以下に e^{tA} を求める方法を紹介する. 行列 A の固有方程式の解を λ_1, λ_2 とすると固有多項式は $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ と因数分解される. ケーリー・ハミルトンの定理より, 固有多項式で λ を形式的に行列 A で置き換えた行列の多項式は零行列になる. 今の場合,

$$(19) \quad (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = O$$

である. ここで O は零行列を表す.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき:

固有多項式の逆数を部分分数に分けると

$$\frac{1}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_1} - \frac{1}{\lambda - \lambda_2} \right)$$

となるから, 両辺に固有多項式 $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ を掛けて

$$1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{(\lambda - \lambda_2) - (\lambda - \lambda_1)\}$$

を得る. これは λ に関する恒等式であるから λ を行列 A に置き換えても成立する. すなわち

$$I = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{(A - \lambda_2 I) - (A - \lambda_1 I)\}$$

が成立する. これを用いて e^{tA} を

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tA} I = e^{tA} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{(A - \lambda_2 I) - (A - \lambda_1 I)\} \\ (20) \quad &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{e^{tA}(A - \lambda_2 I) - e^{tA}(A - \lambda_1 I)\} \end{aligned}$$

と変形しておく. (20) の各項は (19) より

$$\begin{aligned} e^{tA}(A - \lambda_2 I) &= e^{\lambda_1 t} e^{t(A - \lambda_1 I)}(A - \lambda_2 I) \\ &= e^{\lambda_1 t} \left\{ I + t(A - \lambda_1 I) + \frac{1}{2}t^2(A - \lambda_1 I)^2 + \cdots \right\} (A - \lambda_2 I) \\ &= e^{\lambda_1 t} \{(A - \lambda_2 I) + O\} = e^{\lambda_1 t}(A - \lambda_2 I) \end{aligned}$$

および同様に $e^{tA}(A - \lambda_1 I) = e^{\lambda_2 t}(A - \lambda_1 I)$ と計算できる. これらを (20) に代入して

$$(21) \quad e^{tA} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{e^{\lambda_1 t}(A - \lambda_2 I) - e^{\lambda_2 t}(A - \lambda_1 I)\}$$

を得る.

2) $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき:

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ とする. このとき固有多項式は $(\lambda - \lambda_0)^2$ であるからケーリー・ハミルトンの定理より

$$(22) \quad (A - \lambda_0 I)^2 = O$$

が成立する. これより

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda_0 t} e^{t(A - \lambda_0 I)} \\ &= e^{\lambda_0 t} \left\{ I + t(A - \lambda_0 I) + \frac{1}{2} t^2 (A - \lambda_0 I)^2 + \cdots \right\} \\ (23) \quad &= e^{\lambda_0 t} \{ I + t(A - \lambda_0 I) \} \end{aligned}$$

を得る.

例 10 初期値問題

$$\begin{cases} u' &= 2v, \\ v' &= u - v, \\ u(0) &= 2, v(0) = -1 \end{cases}$$

を考える. $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$, $\mathbf{u}_0 = {}^t(2, -1)$ とすると $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ となるから $e^{tA}\mathbf{u}_0$ が解である. e^{tA} を求める. A の固有多項式は $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ であるから $1 = \frac{1}{3}(\lambda + 2) - \frac{1}{3}(\lambda - 1)$ となり, したがって $I = \frac{1}{3}(A + 2I) - \frac{1}{3}(A - I)$ が成立する. 以上より

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{3} e^{tA} (A + 2I) - \frac{1}{3} e^{tA} (A - I) \\ &= \frac{1}{3} e^t e^{t(A-I)} (A + 2I) - \frac{1}{3} e^{-2t} e^{t(A+2I)} (A - I) \\ &= \frac{1}{3} e^t (A + 2I) - \frac{1}{3} e^{-2t} (A - I) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{-2t} & 2e^t - 2e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, 以下の初期値問題の解を得る:

$$e^{tA}\mathbf{u}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{-2t} & 2e^t - 2e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + 4e^{-2t} \\ e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

以上もっとも典型的な (あとで本書で用いる予定のある) 解法だけを紹介したが, その他, 同次形や完全微分方程式など, さまざまなタイプの方程式に対して多数の解法が知られている. 詳しくは常微分方程式のテキストを参照されたい.

4 相空間とベクトル場

(7) で F が t に陽には依存しないとき **自律系** であるといい, そうでないとき **非自律系** という.

以降, 正規形の自律系

$$(24) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = F(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$$

のみを考える. 解 $\mathbf{u}(t)$ が属している空間, 今の場合 $\mathbf{R}^N$, を相空間 といい, 相空間の中に解 $\mathbf{u}(t)$ が描く軌跡 $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ を軌道という. 特に初期条件 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ を満たす解の軌道を $\mathcal{O}(\mathbf{u}_0)$ などと書き, $\mathbf{u}_0$ を通る軌道という. 軌道に関する簡単な補題を一つ与えておく. 自律系であることと解の一意性を用いることにより容易に示すことができる (参考 [5]).

補題 1 軌道同士は共有点をもたない. すなわち $\mathcal{O}(\mathbf{u}_0) \cap \mathcal{O}(\mathbf{u}_1) \neq \emptyset$ ($\emptyset$ は空集合を表す) であれば $\mathcal{O}(\mathbf{u}_0) = \mathcal{O}(\mathbf{u}_1)$ である. また軌道は自己交差するならば閉軌道である.

相空間 $\mathbf{R}^N$ の中で $F(P) = 0$ を満たす点 $P \in \mathbf{R}^N$ を平衡点という. 平衡点はそれ自身 (24) の解である. 実際 $\mathbf{u}(t) \equiv P$ は (24) を満たす. 平衡点 P の近傍の任意の点を初期値として出発した (24) の解がすべての $t > 0$ で P の近傍に留まっているとき P は安定, そうでないとき不安定という. 更に, 平衡点 P の近傍の任意の点を初期値として出発した (24) の解 $\mathbf{u}(t)$ が必ず $\mathbf{u}(t) \rightarrow P$ ($t \rightarrow \infty$) となるととき漸近安定という.

この安定性の概念は大変重要で, 実際我々が目にすることができる状態は安定なものだけである. なぜなら現実世界に存在する系は自然界からさまざまな摂動を常に受けており, そのような摂動を受けてもなお状態があまり変化せず, ほぼ同じ状態を持続しているから見るのできるのである. 不安定な系は次の瞬間には別の状態に遷移してしてしまう.

この節では, 相空間における軌道の幾何学的性質だけから, 安定性など, 解の挙動を理解するための考え方と学ぶ. (2) で初期条件を $u(0) = u_0 > 0$ とすると解は $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$ であったから, $t \rightarrow \infty$ で $u(t) \rightarrow \infty$ となる. こうした挙動は, 微分方程式を実際に解くことができれば, 解の形を見ることにより明らかであるが, 具体的に解くことができない場合はどのようにすればよいであろうか. 解を具体的に解かずに, 解挙動の大体の予想を可能にする方法の一つがベクトル場である. 微分方程式 (24) を満たす関数 $\mathbf{u}(t)$ が一つあったとする. このとき $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \mathbf{R}^N$ は速度ベクトルを与えるから, 相空間内で軌道の接ベクトルになっている. 一方 $\mathbf{u}(t)$ は (24) を満たすから, 速度ベクトル $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ は $F(\mathbf{u}(t))$, すなわち軌道上の点 $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{O}$ における F で与えられることになる. そこで F を相空間内の点 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ にベクトル $F(\mathbf{u}) \in \mathbf{R}^N$ を対応させる写像と考え, ベクトル場という. ベクトル場は, 相空間内の各点において, その点を初期値として出発する軌道の速度ベクトルを与える写像なのである.

例 11 (2) を考える. この場合相空間は $\mathbf{R}$ である. まず平衡点は $\alpha u = 0$ より $P = 0$ である. $\frac{du}{dt} = \alpha u$ であるから $u < 0$ なら $\frac{du}{dt} < 0$ より左向きを, $u > 0$ なら $\frac{du}{dt} > 0$ より右向きの速度を持つことが分かる. したがって軌道は常に平衡点 P から

離れる方向にあるから P は不安定である. また $u > 0$ なる点から出発すればどこまでも右に進んでいく, すなわち $u(t) \rightarrow \infty$ となる (図 1).

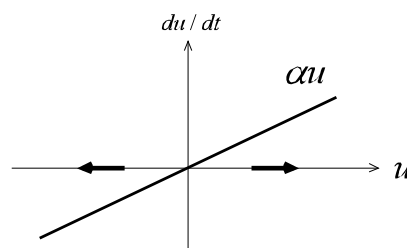


図 1: (2) のベクトル場

例 12 (3) を考える. この場合も相空間は $\mathbf{R}$ より, 左右どちらに進むかさえ見ればよい. まず平衡点は $(\beta - \gamma u)u = 0$ より $P_0 = 0$, $P_1 = \beta/\gamma$ の 2 つである. ベクトル場は図 2) のようであるから, P_0 は不安定, P_1 は (漸近) 安定であることが分かる. 特に $u > 0$ から出発した軌道は平衡点 P_1 に時間と共に近づくことが分かる. このように具体的な解の表示 (4) などを求めることなく, $t \rightarrow \infty$ での挙動を知ることができる.

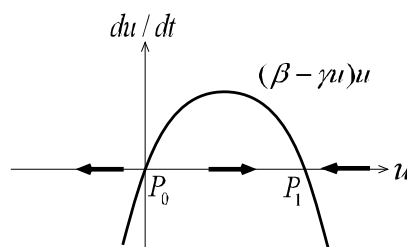


図 2: (3) のベクトル場

例 13 (6) を考える. ただし係数の大小関係によっていくつかの場合分けが必要になるが, 簡単のため, ここでは一例として係数に具体値を入れた

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{u} &= (1 - u - v)u, \\ \dot{v} &= (2 - v - u)v \end{cases}$$

のみ扱うこととし, 生物モデルを意識して $u \geq 0$, $v \geq 0$ の範囲のみを考える. まず平衡点は $\begin{cases} (1 - u - v)u = 0, \\ (2 - v - u)v = 0 \end{cases}$ より, $P_0 = {}^t(0, 0)$, $P_1 = {}^t(1, 0)$, $P_2 = {}^t(0, 2)$ である. ベクトル場の概略は図 3 のようになる. したがって, P_0 , P_1 が不安定, P_2 が漸近安定である. これは, この生態系では種 v のみが最終的に生存し, u は絶滅することを意味している.

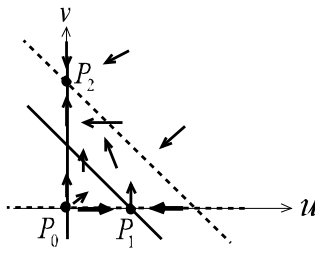


図 3: (25) のベクトル場. 実線は $(1-u-v)u=0$ を, 点線は $(2-u-v)v=0$ を表す.

5 平衡点とその安定性

この節では平衡点の安定性を判定するための方法を紹介する. 平衡点 P の近傍における解の挙動を調べるために $\mathbf{u}(t) = P + \mathbf{v}(t)$ とおくと $\mathbf{v}$ の満たす方程式は

$$(26) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F(P + \mathbf{v})$$

となる. $F(P) = 0$ より $|\mathbf{v}| \ll 1$ において $F(P + \mathbf{v}) = A\mathbf{v} + G(\mathbf{v})$ とテーラー展開される. ここで A はある 2 次の正方行列, $G(\mathbf{v})$ は $|\mathbf{v}| \downarrow 0$ においてある正定数 C があって $|G(\mathbf{v})| \leq C|\mathbf{v}|^2$ と上から評価される関数である. 以降, 簡単のため $\mathbf{R}^2$ で考える. このとき $\mathbf{u} = {}^t(u, v) \in \mathbf{R}^2$ に対して $F(\mathbf{u}) = {}^t(f(u, v), g(u, v)) \in \mathbf{R}^2$ であるとする, $A = \begin{pmatrix} f_u(P) & f_v(P) \\ g_u(P) & g_v(P) \end{pmatrix}$ で与えられる. ここで, $f_u(P) = \frac{\partial f}{\partial u}(P)$, 他の記号も同様である. この行列 A を写像 F の P におけるヤコビ行列または線形化行列といい, $F'(P)$ と表す. $\mathbf{u}$ が平衡点 P に十分近いとき, すなわち $|\mathbf{v}|$ が十分小さいとき G は $A\mathbf{v}$ に比べて十分小さい. そこで G を無視した方程式

$$(27) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v}$$

は $\mathbf{v}$ が小さい限り (26) の解のよい近似になっていると考えられる. (27) を線形化方程式という. 線形化方程式 (27) は定数係数線形方程式系であるから簡単に解くことができる. 実際, 前節までで見てきたように行列の指数関数 e^{tA} を考えれば十分であるが $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ の場合は (21) または (23) によって具体的に与えられる. A の固有値を λ_1, λ_2 とすれば, (21), (23) より, その時間発展はほぼ $e^{\lambda_j t}$ によって決まっている. 特に, $|e^{\lambda_j t}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_j)}$ より λ_1, λ_2 の実部が共に負ならば $e^{\lambda_j t} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) より (27) の解 $\mathbf{v}(t)$ は 0 に収束する. これは平衡点 P の近傍から出発した解はすべて P に収束することを示すから, 漸近安定であるといえる. 一方, 一つでも実部正の固有値があれば $e^{tA} \rightarrow \infty$ であるから, 解は P から離れていくことを意味する. したがって不安定であるといえる. この帰結は一般の次元でも成り立つことが知られており, まとめると次の結果となる.

定理 2 平衡点 P は, F の P における線形化行列 $F'(P)$ の固有値の実部がすべて負ならば漸近安定である. 一方, 固有値のうち, 一つでも実部正のものがあれば不安定である.

この定理により, 少なくとも平衡点の安定性は, 行列の固有値という, 代数的に計算できる量によって判定できることになった.

例 14 例 12 では相空間が $\mathbf{R}$ より, 各平衡点における線形化行列は単に $F(u) = (\beta - \gamma u)u$ としたときの F の微分係数になる. 平衡点は $P_0 = 0$, $P_1 = \beta/\gamma$ であるから各微分係数は $F'(P_0) = \beta > 0$, $F'(P_1) = -\beta < 0$ となり, 確かに P_0 が不安定, P_1 が漸近安定であることが分かる. これはベクトル場から考察された結果と一致している.

例 15 例 13 で平衡点 $P_2 = {}^t(0, 2)$ が安定であることを線形化行列から確かめる. $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$, $F(\mathbf{u}) = {}^t(f(u, v), g(u, v))$, $f(u, v) = (1 - u - v)u$, $g(u, v) = (2 - u - v)v$ とする. $\frac{\partial f}{\partial u} = 1 - 2u - v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -u$, $\frac{\partial g}{\partial u} = -v$, $\frac{\partial g}{\partial v} = 2 - 2v - u$ であるから, これらに P_2 を代入することにより線形化行列 $A = F'(P_2)$ は $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ となる. A の固有方程式は $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ より, 固有値は $\lambda = -1, -2$ と求まる. いずれも負であることから P_2 が漸近安定であると判定される.

線形化方程式により, 安定性のみならずもう少し詳しい解の様子を知ることができる. 実際, 平衡点近傍では (27) によって記述できているから, その解 $e^{tA}\mathbf{v}_0$ ($\mathbf{v}_0 := \mathbf{u}(0) - P$) を調べればよい. 簡単のため相空間を $\mathbf{R}^2$ とし A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 が $\lambda_1 \neq \lambda_2$ の場合のみを考えることにすると (21) より

$$e^{tA} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{ e^{\lambda_1 t} (A - \lambda_2 I) - e^{\lambda_2 t} (A - \lambda_1 I) \}$$

と与えられる. 今, $Q_1 := A - \lambda_2 I$, $Q_2 := A - \lambda_1 I$ とすると $(A - \lambda_1 I)Q_1 = 0$, $(A - \lambda_2 I)Q_2 = 0$ であるから $\mathbf{R}^2$ を Q_1, Q_2 で写した空間 $X_1 := Q_1 \mathbf{R}^2$, $X_2 := Q_2 \mathbf{R}^2$ はそれぞれ固有値 λ_1, λ_2 の固有空間になる. そこで対応する固有ベクトルを ϕ_1, ϕ_2 とすると任意の $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ に対してある定数 α_j を用いて $Q_1 \mathbf{v} = \alpha_1 \phi_1$, $Q_2 \mathbf{v} = \alpha_2 \phi_2$ となる. 以上より

$$e^{tA}\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{ \alpha e^{\lambda_1 t} \phi_1 + \beta e^{\lambda_2 t} \phi_2 \},$$

定数をあらためて書き直して

$$(28) \quad e^{tA}\mathbf{v}_0 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \phi_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \phi_2$$

の形で表されることが分かる. (28) を用いて $e^{tA}\mathbf{v}_0$ の挙動を調べる.

1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ のとき: この場合は安定な場合であり, すべての $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^2$ に対して $e^{tA}\mathbf{v}_0 \rightarrow 0$ となる.

2) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ のとき: この場合は不安定な場合であり, すべての $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^2$ に対して $e^{tA}\mathbf{v}_0 \rightarrow \infty$ となる.

1), 2) のとき平衡点 P は **結節点** という.

3) λ_1, λ_2 が共役な複素数のとき: 実部が負なら回転しながら 0 に収束し, 正なら回転しながら発散する. このとき平衡点 P は**渦状点**という.

4) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ のとき: 固有ベクトル ϕ_1 の方向からは 0 に収束し, ϕ_2 の方向には発散する. このとき平衡点 P は**鞍点**という.

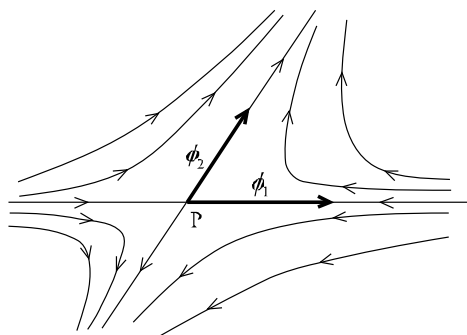


図 4: 鞍点 P の近傍の様子

特に鞍点の場合, $\mathbf{v}(t) = e^{tA}\mathbf{v}_0$ で $\mathbf{v}_0 \in X_1$ (λ_1 の固有空間) ならば $\mathbf{v}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であり, $\mathbf{v}_0 \in X_2$ (λ_2 の固有空間) ならば $\mathbf{v}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow -\infty$) である. このとき X_1 を方程式 (27) における平衡点 0 の**安定多様体**, X_2 を**不安定多様体** という.

線形化する前の方程式 (24) において初期値 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ を満たす解を $\mathbf{u}(t; \mathbf{u}_0)$ と表すことにする. 平衡点 P に対して $W^s(P) := \{\mathbf{u}_0; \mathbf{u}(t; \mathbf{u}_0) \rightarrow P(t \rightarrow \infty)\}$ を平衡点 P の**安定多様体**, $W^u(P) := \{\mathbf{u}_0; \mathbf{u}(t; \mathbf{u}_0) \rightarrow P(t \rightarrow -\infty)\}$ を平衡点 P の**不安定多様体** という. P の近傍ではほぼ (27) で近似されており, 実際固有空間 X_1, X_2 は P においてそれぞれ $W^s(P), W^u(P)$ に接していることが知られている.

6 進行波解への応用

ここまで見てきた常微分方程式系に関する知識を利用して次の偏微分方程式の解をとらえてみる.

例 16 (アレン・カーン方程式)

$u = u(t, x) \in \mathbf{R}$ に関する方程式

$$(29) \quad u_t = u_{xx} + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

を考える. ここで $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ という偏微分を表す. 連立ではないこのような方程式を**スカラー方程式**あるいは**単独方程式**という. (29) の背景についてはここで説明しないが, u_{xx} は拡散の効果に対応した項であることに注意しておく. (29) において拡散 u_{xx} を無視した常微分方程式 $\frac{du}{dt} = f(u)$ が 2 つの安定平衡点を持つとき, **双安定系**という. 典型例は $f(u) = \frac{1}{2}(u-a)(1-u^2)$ ($-1 < a < 1$) である. 双安定である (29) のタイプのスカラー方程式を**アレン・カーン方程式**という. ここでは簡単のため, 典型例である $f(u) = \frac{1}{2}(u-a)(1-u^2)$ ($-1 < a < 1$) のみを考える. この場合, $u = \pm 1$ が 2 つの安定平衡点であり, 常微分方程式としては初期値が a より大きければ 1 に, 小さければ -1 に近づくことがベクトル場を調べることにより容易に分かる. したがって a の周りで適当に揺らいでいる初期値から出発した解は, 時間がしばらく経った後, 殆どの場所で ± 1 のどちらかに近づく. この過程を**相分離**といい, -1 から $+1$ に, あるいは $+1$ から -1 に至る解の形状を**内部遷移層**という.

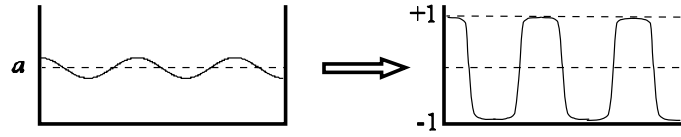


図 5: 1 次元上のアレン・カーン方程式における相分離

相分離後の解の挙動を知るために, 一つの内部遷移層の運動として, **進行波解**と呼ばれる解を考える. ここでいう進行波解とは, $\mathbf{R}$ 上を一定速度, 一定波形で進む (29) の解のことであり, 数学的には次を満たす (29) の解をいう: ある 1 変数関数 $U(z)$ と $c \in \mathbf{R}$ が存在して, $U(x-ct)$ が (29) を満たすとき, $u(t, x) = U(x-ct)$ を (29) の進行波解という.

今の場合, 内部遷移層を考えているから, $U(z)$ に更に

$$(30) \quad U(\pm\infty) = \pm 1$$

を課することにする. $u(t, x) = U(x-ct)$ を (30) とともに (29) に代入することにより

$$(31) \quad 0 = U'' + cU' + f(U), \quad z \in \mathbf{R}, \quad U(\pm\infty) = \pm 1$$

となる. (31) を満たす $U(z)$ と c を求めることが問題となる. (31) には平行移動の自由度があるため, たとえば $U(0) = a$ という制限を加えることにする.

命題 1 (Fife, McLeod 1975) (31) は平行移動を除いて一意な解 $U(z)$ と c をもつ. 特に $U(z)$ は単調増加関数である.

上の命題はより一般的な $f(u)$ に対して示されているが, $f(u) = \frac{1}{2}(u-a)(1-u^2)$ の場

合は $U(z) = \tanh(z/2)$, $c = a$ と具体的に求めることができる. 命題 1 は, (31) を

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = V, \\ \frac{dV}{dt} = -cV - f(U) \end{cases}$$

という常微分方程式系に書き直し, (U, V) 相空間における軌道を考察することにより示される. 実際 (32) の平衡点は $P_- := (-1, 0)$, $P_a := (a, 0)$, $P_+ := (1, 0)$ である. (32) の解 $\mathbf{u}(t) = (U(t), V(t))$ で $\mathbf{u}(t) \rightarrow P_-$ ($t \rightarrow -\infty$), $\mathbf{u}(t) \rightarrow P_+$ ($t \rightarrow +\infty$) となるものと, そのときの c を求めることになる. このような解の存在には c を与える毎に軌道を考慮し, 中間値の定理により c の存在を示す.

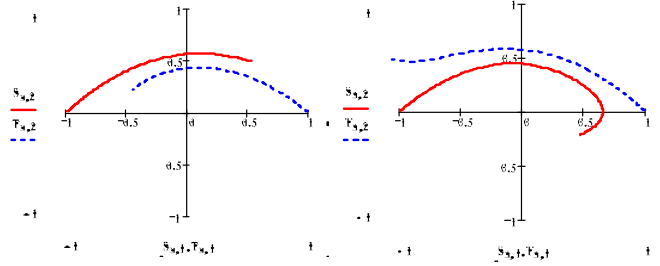


図 6: $a = 0.1$ のときの (U, V) 相空間における P_+ の安定多様体 (点線) と P_- の不安定多様体 (実線) (左図は $c = 0$, 右図は $c = 0.2$).

このようにして構成された進行波解の安定性に関して次の結果がある.

命題 2 (Aronson-Weinberger 1975) (29) において, ある定数 $\gamma > 0$ があって, 初期値 $u(0, x)$ が進行波解 $U(x)$ に十分近いならばある $b \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(t, x) - U(x - ct - b)| \leq O(e^{-\gamma t})$$

($t \rightarrow \infty$) が成立する.

最後に, (29) に対する性質を一つ紹介して終わりとする.

命題 3 (比較定理) すべての $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ に対して $u_t^+ \geq u_{xx}^+ + f(u^+)$, $u_t^- \leq u_{xx}^- + f(u^-)$ と $u^-(t, x) \leq u^+(t, x)$ を満たす滑らかで有界な関数 $u^\pm(t, x)$ が存在するとする. このとき (29) の解 $u(t, x)$ に対して $u^-(0, x) \leq u(0, x) \leq u^+(0, x)$ が成り立てばすべての $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ に対して $u^-(t, x) \leq u(t, x) \leq u^+(t, x)$ が成立する.

参考文献

- [1] 藤原 毅夫, 栄 伸一郎, フーリエ解析+偏微分方程式, 裳華房, 2007.

- [2] 古屋 茂, 常微分方程式入門, サイエンス社, 1970.
- [3] 丹羽 敏雄, 微分方程式と力学系の理論入門, 遊星社, 1988.
- [4] 佐藤總夫, 自然の数理と社会の数理 (I, II), 日本評論社, 1984, 1987.
- [5] 柳田 英二, 栄 伸一郎, 常微分方程式論, 朝倉書店, 2002.
- [6] 藪野 浩司, 工学のための非線形解析入門, サイエンス社, 2004.

メモ

Fourier 変換入門

瀬片純市

福岡教育大学教育学部

1 Fourier 変換の定義とその性質

この節では、まず Fourier 変換の定義とその性質、計算方法について解説する。そして次の節で Fourier 変換を用いて熱方程式や Schrödinger 方程式といった偏微分方程式の初期値問題の解法について解説する。

1.1 準備

Fourier 変換の定義に入る前にまずいくつかの記号を導入する。

$\mathbb{R}^n$ を実数 x_i の n 個の組 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 全体からなる集合、 $\mathbb{Z}_+^n$ を非負整数 α_i の n 個の組 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 全体からなる集合とする。

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して内積 $x \cdot y$ を

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

により定義する。 $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ はユークリッドノルムとよばれる。

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して、単項式 x^α を

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

によって定義する。さらに微分作用素 ∂_x^α を

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

によって定義する。ここに $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ である。

Lebesgue 空間 $L^1(\mathbb{R}^n)$ を

$$L^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f; f \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上の Lebesgue 可測関数で } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

により定義する.

1.2 Fourier 変換の定義とその性質

さて, $\mathbb{R}^n$ 上の Fourier 変換の定義をしよう.

Definition (Fourier 変換). $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする. f の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f]$ 及び Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ を¹

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \\ \mathcal{F}^{-1}[f](x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi\end{aligned}$$

により定義する. $\mathcal{F}[f]$ は $\hat{f}$ と書くこともある.

Example. $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 2 \text{ のとき,} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とすると, 簡単な計算により, $\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2$ となる.

以降では Fourier 変換の基本的性質について見ていくが, そのために Fourier 変換の定義の中に現れる積分に, 微分や部分積分を施したりする. しかしながら f が単に $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属するという事実だけではそのような操作が自由に行えない. そこで微分や積分が自由に行えるような関数のクラスである Schwartz(シュワルツ) クラスを導入しよう.

Definition (Schwartz 空間).

$$\begin{aligned}S(\mathbb{R}^n) = \bigg\{ f; f \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上無限回連続微分可能な関数で} \\ \text{すべての } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \text{ に対して, } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| < +\infty \bigg\}\end{aligned}$$

とおく. $S(\mathbb{R}^n)$ を Schwartz 空間という.

Example 1. $f(x) = e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$ である. 実際, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $x^\alpha \partial_x^\beta f(x) = (|\alpha| + |\beta| \text{ 次多項式}) \times e^{-|x|^2}$ であり, これらはすべて $\mathbb{R}^n$ 上で有界である.

¹ $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{Q_N} f(x) dx$, ここに Q_N は各辺が x_i 軸に平行で一辺の長さが N , 中心が O の立方体.

Example 2. すべての自然数 m に対し, $f(x) = \frac{1}{1+|x|^m} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ である. なぜなら $|x|^{m+1}f(x)$ が $\mathbb{R}^n$ 上で有界でないからである.

上の 2 つの例からわかるように関数が Schwartz 空間に属するためには空間遠方で非常に速く減少していなければならない. そのため Schwartz 空間に属する関数のことを急減少関数という.

Proposition 1.1 (Fourier 変換の性質). $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とすると

(1) 任意の $h \in \mathbb{R}^n$ に対し, 以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) &= \mathcal{F}[f](\xi)e^{ih \cdot \xi}, & \mathcal{F}^{-1}[f(\cdot + h)](x) &= \mathcal{F}^{-1}[f](x)e^{-ih \cdot x}. \\ (ii) \quad \mathcal{F}[f(\cdot)e^{ih \cdot x}](\xi) &= \mathcal{F}[f](\xi - h), & \mathcal{F}^{-1}[f(\cdot)e^{-ih \cdot \xi}](x) &= \mathcal{F}^{-1}[f](x + h). \end{aligned}$$

(2) 任意の $\delta > 0$ に対し, 以下の等式が成立する.

$$\mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) = \delta^{-n} \mathcal{F}[f](\delta^{-1} \xi), \quad \mathcal{F}^{-1}[f(\delta \xi)](x) = \delta^{-n} \mathcal{F}^{-1}[f](\delta^{-1} x).$$

(3) 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し, 以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathcal{F}[\partial_x^\alpha f](\xi) &= (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi), & \mathcal{F}^{-1}[\partial_\xi^\alpha f](x) &= (-ix)^\alpha \mathcal{F}^{-1}[f](x). \\ (ii) \quad \mathcal{F}[x^\alpha f](\xi) &= (i\partial_\xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi), & \mathcal{F}^{-1}[\xi^\alpha f](x) &= (-i\partial_x)^\alpha \mathcal{F}^{-1}[f](x). \end{aligned}$$

Proof of Proposition 1.1. (1) (i) の第 1 式のみ証明するが, 他の等式についても同様に証明することができる.

Fourier 変換の定義より

$$\mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x + h) dx.$$

$y = x + h$ ($x \rightarrow y$) と変数変換すると Jacobian は 1 なので,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-h) \cdot \xi} f(y) dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{ih \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy = \mathcal{F}[f](\xi) e^{ih \cdot \xi}. \end{aligned}$$

(2) (i) の第 1 式のみ証明する. Fourier 変換の定義より

$$\mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(\delta x) dx.$$

$y = \delta x$ ($x \rightarrow y$) と変数変換すると Jacobian は δ^{-n} なので,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\delta^{-1}y \cdot \xi} f(y) \delta^{-n} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \delta^{-1}\xi} f(y) dy = \delta^{-n} \mathcal{F}[f](\delta^{-1}\xi).\end{aligned}$$

(3) (i) の第 1 式のみ証明するが他の等式についても同様に証明される. Fourier 変換の定義より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\partial_{x_1} f](\xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \partial_{x_1} f(x) dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 \xi_1} \partial_{x_1} f(x) dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n.\end{aligned}\quad (1.1)$$

ここで部分積分により

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 \xi_1} \partial_{x_1} f(x) dx_1 &= \left[e^{-ix_1 \xi_1} f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 \xi_1} f(x) dx_1 \\ &= i\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 \xi_1} f(x) dx_1.\end{aligned}$$

最後の等式において $|x| \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow 0$ となることを用いた. これを (1.1) に代入すると

$$\mathcal{F}[\partial_{x_1} f](\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} i\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx = i\xi_1 \mathcal{F}[f](\xi).$$

これを α_1 回繰り返すと

$$\mathcal{F}[\partial_{x_1}^{\alpha_1} f](\xi) = (i\xi_1)^{\alpha_1} \mathcal{F}[f](\xi)$$

となり, $x_2, \dots, x_n$ についても同様に部分積分すると等式 (3) の (i) を得る. $\square$

Fourier 変換の重要な性質のひとつに Fourier 反転公式がある. 証明についてはここでは触れないが Fourier 解析に関する本を参照されたい.

Theorem 1.1 (Fourier 反転公式). $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = f(x)$ が成り立つ.

Definition. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, f と g の合成積 $f * g$ を

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

によって定義する.

合成積と Fourier 変換には以下のような関係がある.

Proposition 1.2. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, 以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathcal{F}[fg](\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g](\xi), & \mathcal{F}^{-1}[fg](x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g](x). \\ (2) \quad \mathcal{F}[f * g](\xi) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[f](\xi) \mathcal{F}[g](\xi), & \mathcal{F}^{-1}[f * g](x) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[f](x) \mathcal{F}^{-1}[g](x). \end{aligned}$$

Proof of Proposition 1.2. まず (2) の最初の等式を証明する. Fourier 変換の定義より,

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f * g(x) dx.$$

合成積の定義より,

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) dx.$$

積分の順序を交換すると,

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x-y) dx \right) g(y) dy. \quad (1.2)$$

Proposition 1.1 (1) (i) より,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x-y) dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[f(\cdot - y)](\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) e^{-iy \cdot \xi}$$

となるので, これを (1.2) に代入すると,

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} g(y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

これで (2) の最初の等式が証明されたが, 同様にして (2) の第 2 の等式も証明される. 次に (1) の第 1 の等式を証明するが, (2) の第 2 の等式において f, g のかわりに $\hat{f}, \hat{g}$ を代入すると, Theorem 1.1 より

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} * \hat{g}](x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f(x) g(x).$$

この両辺に Fourier 変換を施すと (1) の最初の等式を得る. 同様にして (1) の第 2 式を得る. □

1.3 Fourier 変換の計算

ここでは後で述べる n 次元熱方程式の初期値問題を解く際に現れる関数 $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2}$ の ξ 変数についての Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2}](x)$ を求めてみよう. ここに $t > 0$ である.

まず Proposition 1.1 (2) に着目すると,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^2}](x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-|t^{1/2}\xi|^2}](x) = t^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](t^{-\frac{1}{2}}x) \quad (1.3)$$

となるので, $\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^2}](x)$ を求めるためには $\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](x)$ を求めればよい.

まず $n = 1$ の場合に $\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](x)$ を求める. Fourier 逆変換の定義より,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\xi^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 + ix\xi} d\xi.$$

ここで $-\xi^2 + ix\xi = -\left(\xi - i\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4}$ より,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\xi^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi - i\frac{x}{2})^2} d\xi. \quad (1.4)$$

ここで (1.4) の右辺の積分を計算するために複素積分

$$\int_{\Gamma_R} e^{-(z - i\frac{x}{2})^2} dz$$

を考える. ここに積分経路 Γ_R は $\mathbb{C}$ 上の 4 点 $R, -R, -R - i\frac{x}{2}, R - i\frac{x}{2}$ を頂点とする四角形であり, 向きは反時計まわり, R は正の実数とする. 関数 $e^{-(z - i\frac{x}{2})^2}$ は $\mathbb{C}$ 上正則なので Cauchy の積分定理より,

$$\int_{\Gamma_R} e^{-(z - i\frac{x}{2})^2} dz = 0. \quad (1.5)$$

一方, Γ_R の虚軸に平行な辺上の積分は $R \rightarrow +\infty$ のとき 0 に収束する. また Γ_R の実軸上に平行な辺上の積分は

$$-\int_{-R}^{+R} e^{-(\xi - i\frac{x}{2})^2} d\xi + \int_{-R}^{+R} e^{-\xi^2} d\xi$$

に等しいので (1.5) において $R \rightarrow +\infty$ とすると,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi - i\frac{x}{2})^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

ここでよく知られているように (微分積分の本参照) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ であるから

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi - i\frac{x}{2})^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

これを (1.4) に代入すると

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\xi^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \quad (1.6)$$

となる.

次に一般次元の場合に $\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](x)$ を求める.

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi - |\xi|^2} d\xi.$$

ここで

$$e^{ix \cdot \xi - |\xi|^2} = e^{\sum_{i=1}^n (ix_i \xi_i - \xi_i^2)} = \prod_{i=1}^n e^{ix_i \xi_i - \xi_i^2}$$

より,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_i \xi_i - \xi_i^2} d\xi_i = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}^{-1}[e^{-\xi_i^2}](x_i).$$

よって (1.6) より,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x_i^2}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}.$$

ゆえに (1.3) より,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2}](x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^2}](x) \\ &= (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2}](t^{-1/2}x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned}$$

となる. $G_t(x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ とおくと, 以上の計算結果から

$$\hat{G}_t(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2} \quad (1.7)$$

となる. $G_t(x)$ を熱核という.

2 Fourier 変換による偏微分方程式の解法

2.1 n 次元熱方程式の初期値問題

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ が与えられたときの n 次元熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.1)$$

の解を Fourier 変換を用いて求めてみよう. ここに $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ である.

まず (2.1) の第 1, 第 2 式の両辺に Fourier 変換を施すと Proposition 1.1 (3) より

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -|\xi|^2 \hat{u}, & t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.2)$$

となる. ここで (2.2) 第 1 式において ξ を固定して考えると, (2.2) 第 1 式は t に関する常微分方程式とみなすことができる. しかもこの常微分方程式は変数分離型になっているので初等解法で解くことができ, (2.2) 第 1 式の一般解は

$$\hat{u}(t, \xi) = C(\xi) e^{-|\xi|^2 t} \quad (2.3)$$

となる. ここに $C(\xi)$ は ξ に依存する定数である. さらに (2.3) において $t = 0$ を代入すると (2.2) 第 2 式より $C(\xi) = \hat{f}(\xi)$ となることがわかる. したがって (2.2) の解として

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} \quad (2.4)$$

を得る. (2.4) の両辺に Fourier 逆変換を施すと Proposition 1.2 より

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\cdot) e^{-|\xi|^2 t}](x) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2 t}](x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-|\xi|^2 t}](x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる. Fourier 反転公式 (Theorem 1.1) より

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = f(x). \quad (2.6)$$

また前の節で計算したように

$$\mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-|\xi|^2t}](x) = G_t(x) \quad (2.7)$$

であるから (2.6), (2.7) を (2.5) に代入することにより

$$u(t, x) = G_t * f(x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy \quad (2.8)$$

となることがわかる. 逆に (2.8) は (2.1) の第 1 式を満たすことが直接の計算でわかるが, 実際に次の定理を得る.

Theorem 2.1 (熱方程式の解). 与えられた $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$u(t, x) = G_t * f(x), \quad t > 0$$

とおく. ここに G_t は熱核である. このとき

- (1) 関数 u は $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ において C^2 級²であり, (2.1) の第 1 式を満たす.
- (2) $t \rightarrow 0$ のとき x について一様に $u(t, x) \rightarrow f(x)$ となる.

2.2 n 次元 Schrödinger 方程式の初期値問題

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ が与えられたときの n 次元 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.9)$$

の解を熱方程式同様, Fourier 変換を用いて求めてみよう.

(2.9) の第 1, 第 2 式の両辺に Fourier 変換を施すと Proposition 1.1 (3) より

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -i|\xi|^2 \hat{u}, & t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.10)$$

となる. ここで (2.10) 第 1 式において ξ を固定して考えると, (2.10) 第 1 式は t に関する常微分方程式とみなすことができる. しかもこの常微分方程式は変数分離型になっているので初等解法で解くことができ, (2.10) 第 1 式の一般解は

$$\hat{u}(t, \xi) = C(\xi)e^{-i|\xi|^2t} \quad (2.11)$$

²実際には u は t, x について何回でも微分でき C^∞ 級となる.

となる. ここに $C(\xi)$ は ξ に依存する定数である. さらに (2.11) において $t = 0$ を代入すると (2.10) 第 2 式より $C(\xi) = \hat{f}(\xi)$ となることがわかる. したがって (2.10) の解として

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i|\xi|^2 t} \quad (2.12)$$

を得る. ここで熱方程式同様, (2.12) の両辺に Fourier 逆変換を施したいが, $e^{-i|\xi|^2 t} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であるため Proposition 1.2 を用いることができない. しかしながら超関数の概念を用いると $e^{-i|\xi|^2 t}$ を含む広いクラスに対し Fourier 変換が定義され, 上で述べた定理, 命題がそのまま成り立つ. 超関数についてはここでは触れないが, 形式的に Proposition 1.2 を用いると,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\cdot) e^{-i|\xi|^2 t}](x) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-i|\xi|^2 t}](x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-i|\xi|^2 t}](x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる. Fourier 反転公式 (Theorem 1.1) より

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = f(x). \quad (2.14)$$

また Gauss 核の Fourier 変換において形式的に t を it にかえると

$$\mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-i|\xi|^2 t}](x) = G_{it}(x) \quad (2.15)$$

であるから (2.14), (2.15) を (2.13) に代入することにより

$$u(t, x) = G_{it} * f(x) = \left(\frac{1}{4\pi it} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}} f(y) dy \quad (2.16)$$

となることがわかる. 以上, 一部形式的な計算で Schrödinger 方程式の初期値問題 (2.9) の解公式 (2.16) を導いたが, 直接の計算により, (2.16) が (2.9) の第 1 式を満たすことが直接の計算でわかる.

2.3 終わりに

ここでは Fourier 変換入門ということで, Schwartz クラスの関数に対する Fourier 変換と熱方程式の解法に重点を絞り, Fourier 解析の理論で重要となる超関数に対する Fourier 変換や波動方程式の解法については割愛した. これらに興味ある方は例えば

Elias M. Stein, Rami Shakarchi 著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳「フーリエ解析入門」日本評論社

あるいは

堤誉志雄著「偏微分方程式論」培風館
等を参照されたい.

メモ

双安定型反応拡散方程式系に現れる進行波解

中村 健一 (電気通信大学)

KEN-ICHI NAKAMURA

University of Electro-Communications

Chofu, Tokyo 182-8585, Japan

nakamura@im.uec.ac.jp

1 はじめに

自然界では生物種の生息域の拡大や神経細胞内の興奮の伝達など、非線形拡散現象における“波”の伝播がしばしば観察され、それらの多くは反応拡散方程式(系)に現れる進行波として数学的に定式化される。例えば、神経細胞内の興奮伝達は、Hodgkin-Huxley 方程式(あるいは、その簡略版の FitzHugh-Nagumo 方程式)に現れるパルス解として表現される。進行波の研究は、1937 年の Fisher [14] と Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov [31] の先駆的研究を端緒として非常に多くの取り組みがなされてきており、特にパターン形成やパターンの時空間ダイナミクスにおいて現れる特徴的な解として非常に多くの研究がなされてきた。その膨大な成果の一端は、反応拡散系の進行波だけをテーマとして取り扱っている専門書 ([55], [17]) など眺めることができる。

進行波の大きな特徴は形を変えずに一定速度で伝播することであり、これは方程式(系)が空間一様な構造を持つことに本質的に由来する。ところが、現実の世界では環境や媒質が完全に一様であることは稀である。近年は計測・観測技術の進歩と計算機能力の向上に伴って、実際の現象により忠実な、場の非一様性を考慮した数理モデルが用いられるようになっていく。そこで問題となるのは、空間非一様モデルを空間一様モデルと比較したときに定性的に近い解の挙動が得られるかということであるが、必ずしも肯定的な結果ばかりではない。例えば、神経細胞内の電気活動は、媒質の電気抵抗の非一様性により伝達が阻害されることがさまざまなモデルで説明されている。

空間周期的な環境を伝播する進行波に関する研究は、数理生態学の分野における Shigesada-Kawasaki-Teramoto の研究 ([51]) から始まった。彼らは、生物にとって好適な場所 (F , 長さ l_1) と不適な場所 (U , 長さ l_2) が図 1 のようにパッチ状に交互に分布している不均質な環境に生物種が侵入したとき、その生息域がどのように広がっていくかを調べる目的で、周期関数を係数に持つ Fisher-KPP 方程式

$$u_t = (d(x)u_x)_x + (b(x) - u)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

を考察した。ここで、 $n(x, t)$ は位置 x , 時刻 t における生物の個体数密度であり、拡散係数 $d(x)$ および増



図 1: 規則的なパッチ状環境. 好適なパッチと不適なパッチが交互に並んでいる。

殖率 $b(x)$ は

$$d(x) = \begin{cases} d_1 & \text{in } F, \\ d_2 & \text{in } U, \end{cases} \quad b(x) = \begin{cases} b_1 & \text{in } F, \\ b_2 (< b_1) & \text{in } U. \end{cases} \quad (1.2)$$

のように、各パッチ上で定数であるような周期 $l = l_1 + l_2$ の周期関数とする。Shigesada らは、上記のような規則的な構造をしている環境に生物種が侵入したときに、侵入に成功して分布域が広がっていく

ための d_j, b_j, l_j ($j = 1, 2$) に対する条件を求めた. また, 侵入が成功したときに分布の形が周期的に変動しながらつねに前方に広がっていくこと, より正確には, ある $T > 0$ に対し

$$n(x, t + T) = n(x - l, t) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

をみたす解が存在することを数値的に見出した. 彼らは, (1.3) をみたす解を周期的進行波とよび, その平均速度 $s = l/T$ の各種パラメータに対する依存について詳細に調べている.

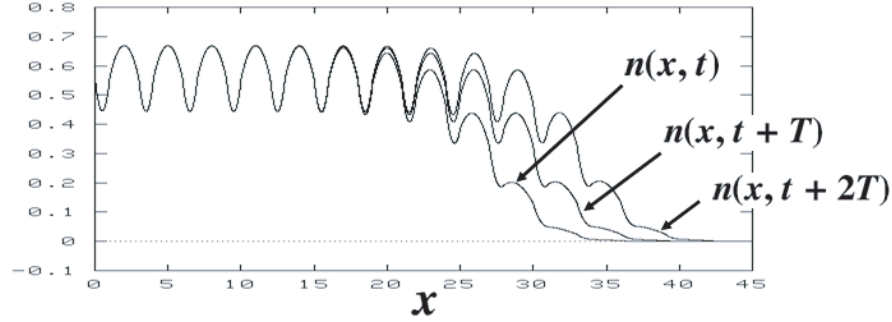


図 2: 周期的進行波の数値例 ($d_1 = 1.0, d_2 = 0.5, b_1 = 1.0, b_2 = -0.5, l_1 = 2, l_2 = 1$).

Shigesada らの論文 [51] は空間周期的環境を伝播する進行波の概念を導入した画期的な仕事であり, 1990 年代以降盛んになった非一様環境における進行波の数学的研究の先駆けとなった. 特に, 環境の非一様性が進行波の伝播速度に与える影響については, Shigesada らの研究に続き, Papanicolaou-Xin [47], Berestycki-Hamel [5], Berestycki-Hamel-Nadirashvili [6], Berestycki-Hamel-Roque [7], Heinze [19], Heinze-Papanicolaou-Stevens [20], Matano-Nakamura-Lou [37, 34], および筆者 [38, 39, 41] らにより, さまざまな反応拡散方程式に対して研究が行われてきたが, 未解決の問題も数多く残されている.

本稿では, 空間周期的な構造を持つ反応拡散方程式の進行波に関してこれまでに得られている結果を, 空間的に一様な場合の結果と対比させつつ概観する. 空間非一様ゆえに生じるさまざまな困難を解決するために, 解析学の非常に広範囲にわたる内容が必要とされていることを見ていただきたい. 一方, 非線形項が双安定型の場合には, 進行波の指数的漸近安定性や進行波の (平均) 伝播速度の精密な評価などの定性的な性質を知るうえで, 比較定理が非常に強力なツールとなっていることを紹介する.

2 一様環境を伝播する進行波

本章では, 空間 1 次元の反応拡散方程式

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.1)$$

の進行波の性質を簡単に紹介する.

2.1 単安定型と双安定型

方程式 (2.1) は, 数理生態学や化学反応, 燃焼などさまざまな非線形現象の数理モデルとして頻繁に登場する. 未知関数 $u(x, t)$ はそれぞれのケースに応じて場所 x , 時刻 t における生物種の個体数密度, 化学物質の濃度, 反応化合物の温度などを表している. 用いられる非線形項 $f(u)$ の形も現象に応じてさまざまであるが, 代表的な例としては,

単安定型: $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, $f > 0$ in $(0, 1)$, $f < 0$ in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$,
 $f(u) \leq f'(0)u$ in $[0, 1]$;

双安定型: $f(0) = f(\alpha) = f(1) = 0$ ($0 < \alpha < 1$), $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$, $f > 0$ in $(-\infty, 0) \cup (\alpha, 1)$, $f < 0$
in $(0, \alpha) \cup (1, +\infty)$, $\int_0^1 f(u)du > 0$;

が挙げられる. 単安定型は, 上述の Fisher および Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov によって研究されており, もともとは適応度の高い個体が空間的に広がっていく過程を記述する集団遺伝学のモデルとして用いられた. 一方, 双安定型は, 相転移に関連した方程式に現れる. また, FitzHugh-Nagumo 方程式のある種の極限とみなすこともできる. 典型例としては, $f(u) = u(1-u)$ (単安定型), $f(u) = u(1-u)(u-\alpha)$ (双安定型. ただし, $0 < \alpha < 1/2$) が挙げられる. このとき, f の零点は (2.1) の定数平衡解となり, 単安定型の場合は $u \equiv 1$ が安定, $u \equiv 0$ が不安定であり, 双安定型の場合は $u \equiv 0$, $u \equiv 1$ が安定, $u \equiv \alpha$ が不安定である.

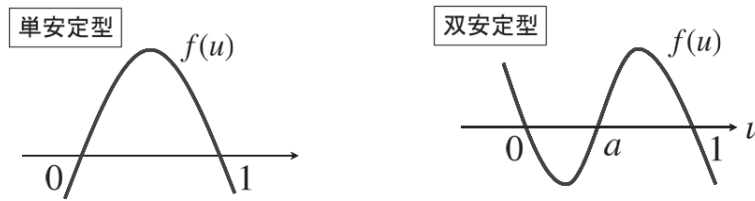


図 3: 反応項 $f(u)$ の関数形: 単安定型 (左) と双安定型 (右)

2.2 進行波の存在

(2.1) の解 $U(x, t)$ で, ある関数 $\varphi(\xi)$ と定数 c を用いて

$$U(x, t) = \varphi(x - ct) \quad (2.2)$$

という形に表されるものを, (2.1) の進行波と呼び, φ をプロファイル, c を速度と呼ぶ. このとき, $(\varphi(\xi), c)$ は, 次の方程式をみたさなければならない:

$$\varphi_{\xi\xi} + c\varphi_{\xi} + f(\varphi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

(2.1) において u は生物の個体数密度や化学物質の濃度などを表しているので, 現象からの要請として $u \geq 0$ を仮定する. したがって, (2.3) の $\varphi \geq 0$ をみたす解を探すことになる. また, 通常 $x \rightarrow \pm\infty$ において系の定常状態に漸近する進行波解, すなわち, f のある零点 $u_{\pm}$ に対し

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \varphi(\xi) = u_{\pm} \quad (2.4)$$

をみたす場合を考察する. $u_+ \neq u_-$ のときフロント進行波, $u_+ = u_-$ のときパルス進行波と呼ぶ. 本稿では, $f(u)$ が単安定型もしくは双安定型の場合に, $u_- = 1$ と $u_+ = 0$ を結ぶフロント進行波についてのみ考察し¹, 単に進行波と呼ぶ. また以下では, 進行波 $\varphi(x - ct)$ のプロファイル φ と速度 c を組にして, (φ, c) を進行波と表現することがある. 速度 c の進行波 $\varphi(x - ct)$ が存在するとき, 逆向きに速度 $-c$ で進む進行波 $\varphi(-(x + ct))$ も存在することに注意する.

¹プロファイルが単調増加になるように $u_- = 0$, $u_+ = 1$ としている論文も多いが, 本稿では単調減少となる場合を考える (こちらがオリジナルであろう). 本稿で引用している結果は, すべて $u_- = 1$, $u_+ = 0$ の形に直してあるので, 原論文を読む際には注意されたい.

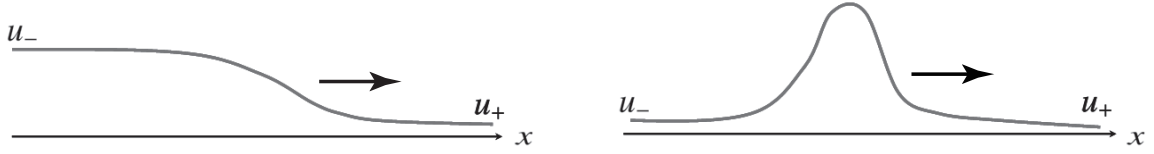


図 4: 進行波のプロファイル: フロント波 (左) とパルス波 (右)

進行波 (φ, c) のみたす方程式 (2.3)- (2.4) (ただし, $u_- = 1, u_+ = 0$) の解を求める方法として一般的なのは, (2.3) を 1 階 ODE のシステム

$$\begin{cases} \varphi_\xi = \psi \\ \psi_\xi = -c\psi - f(\varphi) \end{cases} \quad (2.5)$$

に変換し,

$$(\varphi, \psi)(-\infty) = (1, 0), \quad (\varphi, \psi)(+\infty) = (0, 0) \quad (2.6)$$

のように (2.5) の平衡点 $(1, 0), (0, 0)$ を結ぶ解軌道 (ヘテロクリニック軌道) を見つけるという方法である. 速度 c をパラメータと考えると, 上記のようなヘテロクリニック軌道が存在するような c の値は限られる. 実際, (2.3) の両辺に φ_ξ をかけて $\mathbb{R}$ 上積分すると,

$$c = \frac{\int_0^1 f(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi^2 d\xi} \quad (2.7)$$

が成り立つので, 速度 c の符号は $\int_0^1 f(u) du$ の値と一致しないといけない. したがって, 単安定型の場合は $c > 0$ が成り立つ. また, 本稿における双安定型の仮定の下でも $c > 0$ が成り立つので, 以下では $c > 0$ とする.

(2.3) の解 φ の $\xi \rightarrow \pm\infty$ における挙動は, (2.5) の平衡点 $(j, 0)$ ($j = 0, 1$) における線形化によって得られる:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(j) & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

このとき, 右辺の行列の固有値は次で与えられる.

$$\lambda_\pm^j(c) := \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(j)}}{2} \quad (2.9)$$

よって, 単安定型・双安定型のどちらの場合にも $\lambda_-^1(c) < 0 < \lambda_+^1(c)$ となり, $(1, 0)$ はサドル型平衡点である. 一方, $(0, 0)$ の近くの挙動は単安定型と双安定型では大きく異なる.

単安定型: $c_m := 2\sqrt{f'(0)}$ とおく.

- $c < c_m$ のときは, $\lambda_\pm^0(c)$ は負の実部を持つ互いに共役な複素数となり, $(0, 0)$ は安定渦状点である. したがって, $\xi \rightarrow +\infty$ のとき $\varphi \geq 0$ という要請がみたされない.
- $c = c_m$ のときは, $\lambda_\pm^0(c_m) = -c_m/2$ は重複固有値となり, $(0, 0)$ における線形化行列は対角化不能.
- $c > c_m$ のときは, $\lambda_-^0(c) < \lambda_+^0(c) < 0$ となり, $(0, 0)$ は安定結節点である. このとき, $\varphi(\xi)$ は $\xi \rightarrow +\infty$ で指数的に減衰する.

双安定型: $\lambda_-^0(c) < 0 < \lambda_+^0(c)$ より $(0, 0)$ はサドル型平衡点となる.

さらに詳細な相平面解析により, 次の結果が得られている.

Theorem 2.1 ([31], [25], [13])

- (i) f が単安定型の場合, $\forall c \geq c_m$ に対して (2.1) の速度 c の進行波 $(\varphi(\xi; c), c)$ が存在する.
- (ii) f が双安定型の場合, $c_b > 0$ が一意に存在して, (2.1) の速度 c_b の進行波 $(\varphi(\xi), c_b)$ が存在する.

どちらの場合も, プロファイルは平行移動を除いて一意に存在 (単安定型の場合は, 速度 c を固定するごとに一意に存在) し, しかも ξ について単調減少である.

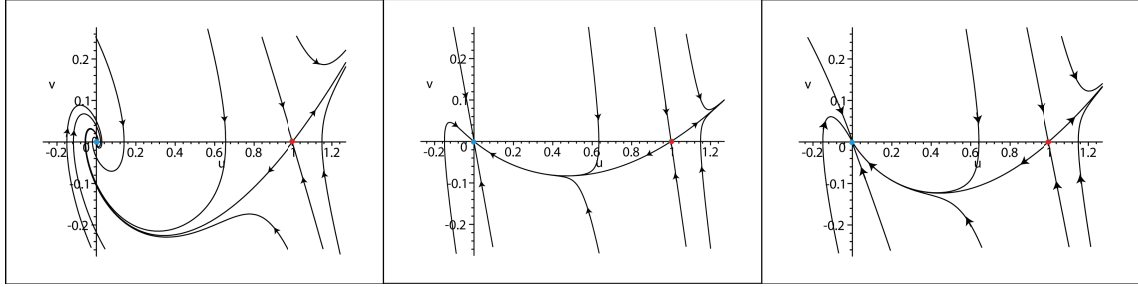


図 5: 単安定型の場合の相図 : $c < c_m$ (左), $c = c_m$ (中), $c > c_m$ (右)

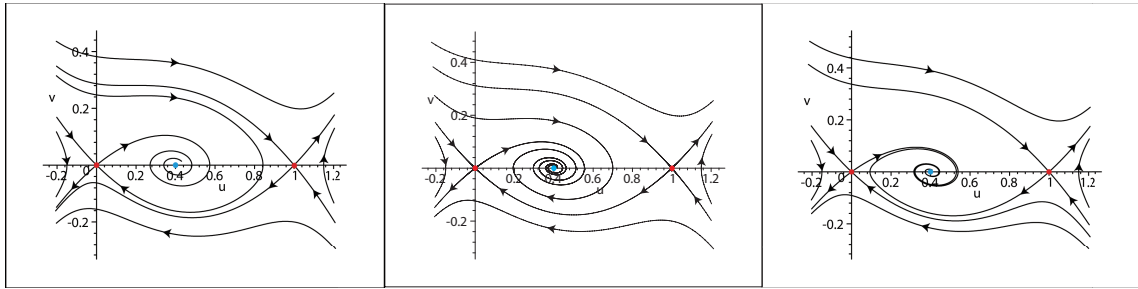


図 6: 双安定型の場合の相図 : $c < c_b$ (左), $c = c_b$ (中), $c > c_b$ (右)

Remark 2.2 反応拡散系の進行波の存在も 1 階 ODE のシステムに対するヘテロクリニック軌道の存在を示す問題に帰着される. ただし, 相空間が $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) なので, ヘテロクリニック軌道の存在を示すことは非常に難しく, そのための手法として, Conley index ([10], [53]) などの位相的方法が用いられることが多い.

2.3 進行波の安定性

現実の系では外部からのノイズ等のゆらぎが加わるにもかかわらず進行波がさまざまな現象において観測されるのは, 進行波が摂動を加えてもたちまち元の形状を復元するという「自己整形作用」を持っていることを意味している. これは数学的には進行波の漸近安定性として定式化される.

空間 1 次元の反応拡散系

$$u_t = Du_{xx} + F(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (2.10)$$

(ただし, $u \in \mathbb{R}^m$, D : 正値対角行列, $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$) に対し, 進行波解

$$U(x, t) = \varphi(x - ct) \quad (2.11)$$

で

$$\varphi(\pm\infty) = u_{\pm} \quad (2.12)$$

(ただし, $F(\mathbf{u}_\pm) = \mathbf{0}$) をみたすものが存在するとする. 通常, 反応拡散系の平衡解・周期解の安定性解析は, その周りの線形化作用素のスペクトルを調べることで行われる. 進行波解の場合は, 動座標 $\xi = x - ct$ を導入することで $\varphi(\xi)$ を

$$\mathbf{u}_t = D\mathbf{u}_{\xi\xi} + c\mathbf{u}_\xi + \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (2.13)$$

の平衡点とみなすことができるので, φ の周りの線形化作用素

$$\mathcal{L}\psi := D\psi_{\xi\xi} + c\psi_\xi + \mathbf{F}'(\varphi(\xi))\psi$$

のスペクトル $\sigma(\mathcal{L})$ を調べることで安定性の判定ができる. その際, 当然のことながら, 適切な関数空間を設定する必要があるが, ここでは $\mathbb{R}$ 上の有界一様連続関数全体の空間 $BU(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ を用いることにする. これは, L^∞ ノルムにより Banach 空間となる. φ を平行移動してもやはり (2.13) の平衡解なので, $\sigma(\mathcal{L})$ は固有値 0 を含んでいる (対応する固有関数は φ_ξ). また, 無限領域の問題なので, 有界領域の問題とは異なり, スペクトルには重複度有限の孤立固有値だけでなく真性スペクトル (essential spectrum) も含まれていることに注意する.

Definition 2.3 $U(x, t) = \varphi(x - ct)$ を (2.10) の進行波解とする.

(i) $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, 0) - U(\cdot, 0)\|_\infty < \delta \implies \|\mathbf{u}(\cdot, t) - U(\cdot, t)\|_\infty < \varepsilon \text{ for all } t \geq 0 \quad (2.14)$$

が成り立つとき, $U(x, t)$ は安定 (stable) であるという.

(ii) $U(x, t)$ が安定, かつ

$$\|\mathbf{u}(\cdot, 0) - U(\cdot, 0)\|_\infty < \delta \implies \|\mathbf{u}(\cdot, t) - U(\cdot + x_0, t)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +\infty \quad (2.15)$$

が成り立つとき, $U(x, t)$ は漸近安定 (asymptotically stable) であるという. ただし, $x_0 \in \mathbb{R}$ は初期値 $\mathbf{u}(\cdot, 0)$ に依存する定数である. さらに, (2.15) の収束が $O(e^{-\nu t})$ ($\exists \nu > 0$) であるとき, 指数的漸近安定という.

Remark 2.4 上記の安定性の定義は, 動座標系で見た方程式 (2.13) の平衡解としての $\varphi(\xi)$ のリヤプノフ安定性に他ならない. 一方, 進行波に対しては空間方向のずれは決して減衰しないので (あるいは, $\forall \xi_0 \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi(\xi + \xi_0)$ も (2.13) の平衡解になるので), 通常の漸近安定性 ((2.15) において $x_0 = 0$ としたもの) は成り立たないことに注意する. そのため, 上記の漸近安定性を “stable with asymptotic phase” として通常の漸近安定性と区別することもある.

解析的半群の理論と力学系の不変多様体論を用いることで, $\mathcal{L}$ のスペクトルの情報から進行波の漸近安定性が示される. ただし, 前提条件として, 進行波の無限遠方での指数的減衰を仮定する:

$$\exists C, a > 0: \quad |\varphi(\xi) - \mathbf{u}_+| \leq Ce^{-a\xi} \quad (\xi > 0), \quad |\varphi(\xi) - \mathbf{u}_-| \leq Ce^{a\xi} \quad (\xi < 0), \quad |\varphi'(\xi)| \leq Ce^{-a|\xi|} \quad (\xi \in \mathbb{R}). \quad (2.16)$$

Proposition 2.5 (cf. [3], [1]) $\sigma(\mathcal{L})$ が

(i) $\sigma(\mathcal{L}) \setminus \{0\} \subset \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda \leq -\beta\}$ ($\exists \beta > 0$)

(ii) 0 は単純固有値 (重複度 1 の固有値)

をみたすならば, (2.10) の進行波解 $\varphi(x - ct)$ は漸近安定である.

0 の近傍に含まれる線形化作用素 $\mathcal{L}$ の固有値については, stability index などの位相的手法で調べることができ, FitzHugh-Nagumo 方程式を含むさまざまな反応拡散系の進行波 (フロント波, パルス波) の安定性解析が行われている (このあたりは, 新居氏の論説記事 [43] に詳細な解説がある).

さて, 空間 1 次元の方程式 (2.1) の場合を考えてみよう. 特に, 単安定型の場合は $\forall c \geq c_m$ に対し速度 c の進行波が存在するため, 速度の異なる進行波が (連続濃度で) 混在していることになる. したがって, 初期値を与えたときにどの速度の進行波に漸近するかという速度選択の問題が生じる. 例えば, $x < 0$ において 1, $x > 0$ において 0 という初期値から出発した単安定型方程式の解は最小速度の進行波 $\varphi(x - c_m t; c_m)$ に $t \rightarrow +\infty$ で漸近することが Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov [31] により証明されている. 速度選択については, 西浦先生の書籍 [44] の 3 章に非常に詳しい説明があるので参照されたい. (φ, c) を (2.1) の進行波とすると, 線形化作用素は

$$\mathcal{L}\psi := \psi_{\xi\xi} + c\psi_{\xi} + f'(\varphi(\xi))\psi \quad (2.17)$$

となる. $\xi \rightarrow \pm\infty$ における極限作用素を

$$\mathcal{L}_{\pm}\psi := \psi_{\xi\xi} + c\psi_{\xi} + f'(u_{\pm})\psi \quad (2.18)$$

と定義する ($u_- = 1, u_+ = 0$) と, $\mathcal{L}$ の真性スペクトルは $\mathcal{L}_{\pm}$ の真性スペクトルの和集合に含まれることが知られている ([21]). $\mathcal{L}_{\pm}$ は定数係数の常微分作用素であるから, スペクトルの計算は Fourier 変換等を用いて容易に計算可能である.

単安定型: $f'(0) > 0$ より, $\mathcal{L}_+$ の連続スペクトルが $\mathbb{C}$ の右半平面まで伸びている. したがって, 進行波 $\varphi(x - ct; c)$ は $BU(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ の位相では安定ではない. ただし, $c > c_m$ の場合は, $\varphi(x - ct; c)$ に与える初期摂動を適切な重み付きの関数空間にとると双安定型に帰着され, 漸近安定性が示される ([50]). $c = c_m$ の場合は同じやり方ではうまくいかないが, 巧みな変数変換や繰り込み群の方法により, 進行波 $\varphi(x - s_m t; s_m)$ への t の多項式オーダーの収束が示されている ([30], [16]).

双安定型: $f'(0) < 0, f'(1) < 0$ より, $\mathcal{L}_{\pm}$ の真性スペクトルは $\mathbb{C}$ の左半平面にあり, しかも虚軸から完全に離れていることがわかる. これにより, 進行波 $\varphi(x - c_b t)$ の漸近安定性が示される.

ただし, 上記のように線形化作用素 $\mathcal{L}$ のスペクトルを調べて得られる漸近安定性はすべて局所的なものであることに注意する (すなわち, 非常に小さい摂動は時間とともに減衰する).

2.4 比較定理と大域的漸近安定性

大域的な安定性を示すためには, 次の比較定理が重要な役割を果たす.

Theorem 2.6 (比較定理) $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 $u^{\pm}(x, t)$ が

$$u_t^- \leq u_{xx}^- + f(u^-), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (\text{劣解})$$

$$u_t^+ \geq u_{xx}^+ + f(u^+), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (\text{優解})$$

をみたすとする. このとき, $u^-(x, 0) \leq u^+(x, 0)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) ならば,

$$u^-(x, t) \leq u^+(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.19)$$

が成り立つ. さらに, $u^- \not\equiv u^+$ ならば,

$$u^-(x, t) < u^+(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0. \quad (2.20)$$

双安定型の場合は, 進行波 $\varphi(x - c_b t)$ の大域的な指数漸近安定性が Fife-McLeod [13] により比較定理 (とりやプロフ関数) を利用して示されている.

Theorem 2.7 ([13]) $f(u)$ は双安定型と仮定する. (2.1) の解 $u(x, t)$ が $t = 0$ において

$$0 \leq u(x, 0) \leq 1, \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} u(x, 0) < \alpha < \liminf_{x \rightarrow -\infty} u(x, 0) \quad (2.21)$$

をみたすとする. このとき, $x_0 \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\nu > 0$ が存在して,

$$\|u(\cdot, t) - \varphi(\cdot - c_b t - x_0)\|_\infty \leq M e^{-\nu t} \quad (\forall t \geq 0) \quad (2.22)$$

が成り立つ.

Remark 2.8 高次元の問題

$$u_t = \Delta u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \quad (2.23)$$

において, 1次元の進行波 (φ, c) を進行方向 $e \in S^{N-1}$ と直交する方向には一様に拡張することで, 速度 c の高次元フロント進行波 $\varphi(x \cdot e - ct)$ が構成できる. このとき, 例えば $e = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ とし, x_1 方向の動座標系 $\xi = x_1 - ct$ で方程式を書き直すと

$$u_t = u_{\xi\xi} + cu_\xi + \Delta_{x'} u + f(u) \quad (2.24)$$

となる. ただし, $\Delta_{x'}$ は変数 $x' = (x_2, \dots, x_N)$ に対するラプラシアンである. すると, 初期状態において進行波に与えた摂動は x' 方向には熱方程式 $u_t = \Delta_{x'} u$ によって拡散し, t の多項式オーダーで減衰することが示唆されるので, 指数的漸近安定性は望めない (実際, φ のまわりの線形化作用素は $\Delta_{x'} u$ の項の影響で 0 の付近に連続スペクトルを持つ).

3 周期的環境を伝播する進行波の存在

本節では, 空間周期的な係数を持つ反応拡散方程式

$$u_t = \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x) \cdot \nabla u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

の進行波の存在に関する結果を紹介する. ただし, $A(x)$, $q(x)$ については以下を仮定する.

(H1) $A(x) = (a_{ij}(x))$ は対称正定値行列. また, $a_{ij}(x)$ は $x = (x_1, \dots, x_N)$ の滑らかな関数で各成分 x_i について 1-周期的.

(H2) $q(x) = (q_j(x))$ は $\operatorname{div} q = 0$ をみたす滑らかな N 次元ベクトルで, 各成分 x_i について 1-周期的, かつ

$$\int_{T^N} q(x) dx = 0 \quad (T^N \text{ は } N \text{ 次元トーラス}). \quad (3.2)$$

環境が一様でない場合, すなわち $A(x)$, $q(x)$ がそれぞれ定数行列, 定数ベクトルでない場合は, 一様環境の場合とは異なり一定波形・一定速度で進む進行波は存在しない. そこで, Shigesada-Kawasaki-Teramoto [51] で観察されたように, 時間周期的に波形・速度を変えながら進む解を考える.

Definition 3.1 ([5]) $e \in S^{N-1}$ とする. このとき, $U(x, t)$ が (3.1) の e 方向に進むフロント波であるとは,

(i) $U(x, t)$ は $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ に対し (3.1) をみたす.

(ii) $\exists T \neq 0$ が存在して, $\forall \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対し,

$$U(x, t + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})T) = U(x - \mathbf{k}, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$U(x, t) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{as } x \cdot \mathbf{e} \rightarrow -\infty \\ 0 & \text{as } x \cdot \mathbf{e} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.4)$$

ただし, $\mathbf{e}$ と直交する変数に関しては一様収束.

また, $s(\mathbf{e}) = 1/T$ を $\mathbf{e}$ 方向に進むフロント波の平均速度 (または, 実効速度) と呼ぶ.

Remark 3.2 条件 (3.3) の意味を理解するために, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0)$ としてみる. このとき, $\mathbf{k}$ として $\mathbf{e}_j$ ($j = 1, \dots, N$) をとると, (3.3) より

$$U(x, t + T) = U(x - \mathbf{e}_1, t) \quad (3.5)$$

$$U(x, t) = U(x - \mathbf{e}_j, t) \quad (j = 2, \dots, N) \quad (3.6)$$

を得る. したがって, $\mathbf{e}_1$ 方向に進むフロント波は, 時刻 T ごとに $\mathbf{e}_1$ だけ進み, $\mathbf{e}_1$ と直交する方向には空間周期的なプロファイルを持っていることがわかる.

$\mathbf{e}$ 方向に平均速度 s で進むフロント波の存在は, Xin ([56, 57, 58]) が導入した変換

$$U(x, t) = \mathcal{U}(x \cdot \mathbf{e} - st, x) \quad (3.7)$$

により $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\xi, y)$ に対する次の問題に帰着される.

$$(e\partial_\xi + \nabla_y) \left(A(y)(e\partial_\xi + \nabla_y)\mathcal{U} \right) + q(y) \cdot (e\partial_\xi + \nabla_y)\mathcal{U} + s\partial_\xi \mathcal{U} + f(\mathcal{U}) = 0, \quad (\xi, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad (3.8)$$

$$\mathcal{U}(-\infty, y) = 1, \quad \mathcal{U}(+\infty, y) = 0 \quad \text{uniformly in } y \in \mathbb{R}^N \quad (3.9)$$

$$\mathcal{U}(\cdot, y): 1\text{-periodic in } y \quad (3.10)$$

退化楕円型方程式 (3.8) は, 空間一様な場合に進行波がみたす方程式 (2.3) の一般化になっており, これらをみたすプロファイル $\mathcal{U}(\xi, y)$ と平均速度 s を求めることになる. 以下では, 進行波 $U(x, t)$ のプロファイル $\mathcal{U}$ と平均速度 s を組にして, $(\mathcal{U}, s)$ を進行波と表現することがある.

3.1 単安定型の場合のフロント波の存在

$f(u)$ が単安定型の場合の (3.8)-(3.10) の解の存在は, Berestyki-Hamel [5] により完全に解決されている (彼らは, より一般に, ある成分 $x' \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^N$ に対してのみ周期的な係数や領域の場合を取り扱っている).

Theorem 3.3 ([5]) $\mathbf{e} \in S^{N-1}$ とする. このとき, 次をみたす $s_m(\mathbf{e}) > 0$ が存在する:

(i) $s < s_m(\mathbf{e})$ ならば, (3.8)-(3.10) の解は存在しない.

(ii) $s \geq s_m(\mathbf{e})$ ならば, (3.8)-(3.10) の解 $(\mathcal{U}(\xi, y), s)$ が存在し, さらに, $\mathcal{U}(\xi, y)$ は ξ に関して単調減少となる.

定理の証明は (考えられる限りの一般的な状況を扱っていることもあるが) かなり長く複雑である. 実際, 彼らの論文は 80 ページを超える大作であり, すべてを読み通すには解析学の広範囲の知識を必要とする. ここでは, 極めて簡単な概略のみを紹介するにとどめる.

(1) まず, $f(u)$ を次をみたす Lipschitz 連続な関数 $f_\theta(u)$ で近似する: $\theta \in (0, 1)$ に対し

$$f_\theta(u) = 0 \quad (u \in [0, \theta]), \quad f_\theta(u) > 0 \quad (u \in (0, 1)), \quad f_\theta(1) = 0. \quad (3.11)$$

このタイプの非線形項を燃焼型 (combustion type with ignition temperature) と呼ぶ².

(2) (3.8)-(3.10) において f を f_θ で置き換えた問題を, さらに次の正則化した問題で近似する.

$$\varepsilon \mathcal{U}_{\xi\xi} + (e\partial_\xi + \nabla_y) \left(A(y)(e\partial_\xi + \nabla_y) \mathcal{U} \right) + q(y) \cdot (e\partial_\xi + \nabla_y) \mathcal{U} + s\partial_\xi \mathcal{U} + f_\theta(\mathcal{U}) = 0 \quad \text{in } (-a, a) \times \mathbb{R}^N \quad (3.12)$$

$$\mathcal{U}(-a, y) = 1, \quad \mathcal{U}(+a, y) = 0 \quad y \in \mathbb{R}^N \quad (3.13)$$

$$\mathcal{U}(\cdot, y): 1\text{-periodic in } y \quad (3.14)$$

このとき, 近似問題 (3.12)-(3.14) の解 $(\mathcal{U}, s)$ で

$$\max_{y \in \mathbb{R}^N} \mathcal{U}(0, y) = \theta \quad (3.15)$$

をみたすものが一意に存在する. それを $(\mathcal{U}^{\varepsilon, a, \theta}, s^{\varepsilon, a, \theta})$ と書く. $\mathcal{U}^{\varepsilon, a, \theta}(\xi, y)$ は ξ に関して単調減少である.

(3) $s^{\varepsilon, \theta} := \liminf_{a \rightarrow +\infty} s^{\varepsilon, a, \theta}$ とすると, $s^{\varepsilon, \theta} > 0$ であり, $s^{\varepsilon, a_n, \theta} \rightarrow s^{\varepsilon, \theta}$ となる $a_n \rightarrow +\infty$ に対し, $\mathcal{U}^{\varepsilon, a_n, \theta}$ は (3.12)-(3.14) で $a = +\infty$ とした問題の解 $\mathcal{U}^{\varepsilon, \theta}$ に収束する. さらに, $\mathcal{U}^{\varepsilon, \theta}(\xi, y)$ は ξ に関して単調減少である.

(4) $s^\theta := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} s^{\varepsilon, \theta}$ とすると, s^θ は θ に関して単調非増大, かつ $s^\theta > 0$ である. さらに, $\mathcal{U}^{\varepsilon, \theta}(x, t) = \mathcal{U}^{\varepsilon, \theta}(x \cdot e - s^{\varepsilon, \theta} t, x)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, $f_\theta(u)$ に対する e 方向に平均速度 s^θ で進む進行波 $U^\theta(x, t)$ に収束する. さらに, $U^\theta(x, t)$ は t に関して単調減少である.

(5) $s_m(e) := \lim_{\theta \rightarrow 0} s^\theta$ とおくと, $s_m(e) > 0$ であり, u^θ の適当な部分列は e 方向に平均速度 $s_m(e)$ で進む (3.1) の進行波 $U^*(x, t)$ に収束する.

(6) $s > s_m(e)$ に対し, 再び正則化問題を考える. ただし, (3.13) に代わる境界条件, (3.15) に代わる束縛条件を適切に設定する. その解に対し, 同じように $a \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとって, e 方向に平均速度 s で進む進行波を構成する.

(7) e 方向に平均速度 $s < s_m(e)$ で進む進行波が存在すると仮定して矛盾を導く. その際にも, $s < s^\theta$ をみたす平均速度で e 方向に進む $f_\theta(u)$ に対する進行波 U^θ の存在を利用する.

退化した方程式を正則化して解き, 極限をとるという議論はよく行われるが, この証明は

- 無限領域を (進行方向については) 有限領域で近似.
- 退化した方程式を正則化.
- $f(u)$ を $f_\theta(u)$ で近似して速度を正則化 (進行波の平均速度が $s_m(e)$ 以上の任意の値をとり得るという意味で退化している).

という極めて複雑な構造 (三重苦?) をしている. これらの手法はもともと, Shear flow 問題, すなわち

$$\begin{aligned} A(x) &\equiv I \quad (\text{単位行列}), \\ q(x) &= (q_1(x'), 0, \dots, 0), \quad x' = (x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3.16)$$

の場合に Berestycki-Nirenberg ([8]) により開発された (この論文も 80 ページ近くある).

² u を温度と思えば, 温度 θ 以下では反応は起こらないが, 温度が θ を超えると反応が起こる.

3.2 双安定型の場合のフロント波の存在

前節の手法は、極限をとるときに $f(u) \geq 0$ ($u \in [0, 1]$) という性質を本質的に利用しているため、双安定型の場合に用いることができない。Xin は continuation method と呼ばれる方法を用いて、双安定型の場合の進行波の存在を証明した:

Theorem 3.4 ([57, 59]) $A(x)$ の各成分ごとに平均をとって得られる定数行列を $\bar{A}$ とする。このとき、 $\delta > 0$ が存在して

$$\|A - \bar{A}\|_{H^s} < \delta, \quad \|q\|_{H^s} < \delta \quad \left(s = 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \quad (3.17)$$

ならば、(3.8)-(3.10) の解 $(\mathcal{U}(\xi, y), s)$ が ξ 方向の平行移動を除いて一意に存在する。また、一意に定まる速度を $s_b(e)$ とおくと、 $s_b(e) > 0$ であり、さらに次が成り立つ ($\exists C, a > 0$)。

$$\begin{aligned} 0 < \mathcal{U}(\xi, y) &\leq Ce^{-a\xi}, & \xi \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^N, \\ 0 < 1 - \mathcal{U}(\xi, y) &\leq Ce^{a\xi}, & \xi \leq 0, \quad y \in \mathbb{R}^N, \\ 0 < \mathcal{U}_\xi(\xi, y) &\leq Ce^{-a|\xi|}, & \xi \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Remark 3.5 (3.18) の第3式より、(3.1) の進行波 $U(x, t) = \mathcal{U}(x - st, x)$ は時間に関して単調増大 ($U_t > 0$) であることがわかる。この単調性が U の安定性、漸近安定性に大きく寄与している (次章参照)。

Theorem 3.4 の証明も概略のみを記すことにする。記述を簡単にするために、以下では $\bar{A} = I$ (単位行列)、 $q(x) \equiv 0$ と仮定する。

$A^\lambda(y) := \lambda A(y) + (1 - \lambda)I$ に対し、

$$(e\partial_\xi + \nabla_y) \left(A^\lambda(y)(e\partial_\xi + \nabla_y)\mathcal{U} \right) + s\partial_\xi \mathcal{U} + f(\mathcal{U}) = 0, \quad (\xi, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad (3.19)$$

$$\mathcal{U}(-\infty, y) = 1, \quad \mathcal{U}(+\infty, y) = 0 \quad \text{uniformly in } y \in \mathbb{R}^N \quad (3.20)$$

$$\mathcal{U}(\cdot, y): \text{1-periodic in } y \quad (3.21)$$

の解 $(\mathcal{U}^\lambda(\xi, y), s^\lambda)$ を考える。 $\lambda = 0$ のときは、一様な場合の進行フロント波 $(\varphi(\xi), c_b)$ が解になっている。これを、 $\lambda = 1$ まで解を接続して (3.8)-(3.10) の解を求めようというのが continuation method の考え方である。そのためには、

(a) 局所的に接続ができること。

(b) $\lambda = 1$ まで接続が伸びること。

を示さなければならない。

(a) について：

(1) $\lambda = \lambda_0$ に対して、解 $(\mathcal{U}^{\lambda_0}(\xi, y), s^{\lambda_0})$ が存在すると仮定する。このとき、 $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, $\mathcal{U}^\lambda = \mathcal{U}^{\lambda_0} + \varepsilon \mathcal{V}$, $s^\lambda = s^{\lambda_0} + \varepsilon \sigma$ とおき、 $\mathcal{L}^{\lambda_0}$ を $\mathcal{U}^{\lambda_0}$ における線形化作用素

$$\mathcal{L}^{\lambda_0} \mathcal{V} := (e\partial_\xi + \nabla_y) \left(A^{\lambda_0}(y)(e\partial_\xi + \nabla_y)\mathcal{V} \right) + s^{\lambda_0} \partial_\xi \mathcal{V} + f'(\mathcal{U}^{\lambda_0})\mathcal{V} \quad (3.22)$$

とすると、 $\mathcal{V}$ のみたすべき方程式は

$$\mathcal{L}^{\lambda_0} \mathcal{V} = g_\varepsilon(\xi, y, \mathcal{V}; \sigma) \quad (3.23)$$

という形に書ける。

(2) $\mathcal{L}^{\lambda_0}$ を重みつき L^2 空間上の作用素と考えたとき、 f が双安定型であることを利用すると、0 は孤立した単純固有値 (対応する固有関数は $\mathcal{U}_\xi$) となり、

$$\mathcal{L}^{\lambda_0}\psi = g \text{ が可解} \iff g \text{ が } \ker(\mathcal{L}^*) \text{ の元と (重みつき } L^2) \text{ 空間で直交}$$

となる. さらに, $\exists \psi^* > 0$ に対し $\ker(\mathcal{L}^*) = \text{span}\{\psi^*\}$ となる.

(3) 与えられた v に対し, (3.23) の右辺 $g_\varepsilon(\xi, y, v; \sigma)$ が ψ^* と直交するように σ を定め, その σ に対し, $g = g_\varepsilon(\xi, y, v; \sigma)$ として $\mathcal{L}^{\lambda_0}\psi = g$ を解き, その解を $\psi = \Psi(v)$ と定義する. すると, ε が十分小さいとき Ψ は縮小写像になり, 不動点 $\mathcal{V}$ が存在する.

(4) (3) の $\mathcal{V}, \sigma$ を用いて, $\mathcal{U}^\lambda = \mathcal{U}^{\lambda_0} + \varepsilon \mathcal{V}$, $s^\lambda = s^{\lambda_0} + \varepsilon \sigma$ とすると, $(\mathcal{U}^\lambda(\xi, y), s^\lambda)$ は $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ に対する (3.19)-(3.21) の解になっている.

上記の continuation method は, $f(u)$ が燃焼型 ((3.11) の f_θ) の場合にも通用する.

(b) について:

(a) の局所的な continuation が破綻するのは, 途中の $\lambda_1 \in [0, 1]$ で $s^\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda \nearrow \lambda_1$) となってしまうときである. なぜなら, Xin の変換 (3.7) は $s = 0$ のときは意味をなさないので, (3.19)-(3.21) の $s = 0$ の解から対応する反応拡散方程式の解を復元できないからである. 単安定型 (および, 燃焼型) の場合は $f(u) \geq 0$ ($u \in [0, 1]$) より $s > 0$ は保証されているが, 双安定型の場合は, 非一様性が強くなると安定平衡解が存在して解の空間伝播をブロックしてしまうことがある ([59], [61], [38]). このため, 双安定型の場合の進行波の存在定理 (Theorem 3.4) において, 環境変化があまり大きくないという条件 (3.4) が必要になる. ただし, (3.4) の δ の大きさは具体的に求まるわけではない.

空間 1 次元の場合 (このとき, 必然的に $q(x) \equiv 0$) は, 適切な比較関数を構成することにより, 進行波が存在するための十分条件を広げることができる.

Theorem 3.6 ([38]) $N = 1$ とする. すなわち,

$$u_t = (A(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3.24)$$

を考える. このとき,

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left(\sqrt{A(x)} \right)' < c_b \quad (3.25)$$

ならば, (3.24) の進行波が存在する. ただし, c_b は一様な場合の進行波の速度.

(Proof) continuation の途中段階 (3.19)-(3.21) (ただし, $N = 1$) を引き戻して得られる反応拡散方程式

$$u_t = (A^\lambda(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3.26)$$

に対し,

$$u^-(x, t) = \varphi \left(\zeta^\lambda(x) - s_0 t - x_0 \right) - \delta, \quad \zeta^\lambda(x) := \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{A^\lambda(\xi)}} \quad (3.27)$$

という形の劣解を構成する. (3.25) が成り立つとき, s_0 を $\lambda \in [0, 1]$ によらない正定数にとることができる. s^λ に対する下からの一様評価

$$s^\lambda \geq s_0 \left\langle \sqrt{A} \right\rangle_H \quad (\langle \cdot \rangle_H \text{ は調和平均}) \quad (3.28)$$

を得る. したがって, continuation は $\lambda = 1$ まで破綻しない. $\square$

4 周期的環境を伝播する進行波の安定性

本節では, 空間周期的な係数を持つ単独の反応拡散方程式

$$u_t = (D(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

の進行波 $U(x, t)$ の安定性について考える.

4.1 安定性の定義

方程式 (4.1) には空間方向の平行移動不変性がないが, 時間シフトに関する不変性があるので, 漸近安定性の定義として次を採用する (安定性の定義は同じ)

Definition 4.1 $U(x, t)$ を (4.1) の進行波解とする. $U(x, t)$ が安定, かつ

$$\|u(\cdot, 0) - U(\cdot, 0)\|_\infty < \delta \implies \|u(\cdot, t) - U(\cdot, t + t_0)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +\infty \quad (4.2)$$

が成り立つとき, $U(x, t)$ は漸近安定 (asymptotically stable) であるという. ただし, $t_0 \in \mathbb{R}$ は初期値 $u(\cdot, 0)$ に依存する定数である.

進行波の性質

$$U(x, t + T) = U(x - 1, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (4.3)$$

を利用すると, $V(x, t) = U(x + st, t)$ ($s = 1/T$) は

$$v_t = (D(x + st)v_x)_x + sv_x + f(v), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.4)$$

の T -周期解となる. したがって, V の安定性を調べるためには, (4.4) において $v(\cdot, 0)$ に対し $v(\cdot, T)$ を対応させる写像 (time- T -map) Π_T の不動点としての $V(\cdot, 0)$ の安定性を調べることになる. 一様な場合の議論と同様に, V の周りの線形化作用素

$$\mathcal{L}(t)\psi = (D(x + st)\psi_x)_x + s\psi_x + f'(V(x, t))\psi$$

を考えると, $\mathcal{L}(t + T) = \mathcal{L}(t)$ が成り立つ. $-\mathcal{L}(t)$ に対応する発展作用素を $\mathcal{T}(t, s)$ とするとき, V の安定性は $\mathcal{P} := \mathcal{T}(T, 0)$ のスペクトルの情報で記述できる ([11]). ただし, $\mathcal{P}$ は 1 を固有値に持つことに注意する. これは進行波の性質 (4.3) に由来する. 実際, X_{in} の変換 $U(x, t) = \mathcal{U}(\xi, y)$ ($\xi = x - st, y = x$) に対し, $\mathcal{U}_\xi(x, x + st)$ は $\psi_t = \mathcal{L}(t)\psi$ の T -周期解となる. したがって, V の漸近安定性は,

$$\sigma(\mathcal{P}) \setminus \{1\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < k_0\} \quad (\exists k_0 \in (0, 1)) \quad (4.5)$$

の場合に成り立つことになる.

この方針での進行波の (局所) 漸近安定性の証明は, Xin [57] によりなされたが指数的収束を示すために進行波 U の regularity, および進行波に加える摂動のクラスに制約がある:

$U(x, t) = \mathcal{U}(x - st, x)$ を (4.1) の進行波とする. このとき, $V(x, t) := \mathcal{U}(x, x + st)$ の (4.4) の周期解としての漸近安定性は以下ようになる.

Theorem 4.2 ([57]) $\mathcal{U} \in C^3, \mathcal{U}_\xi \in H^3$ を仮定する. $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ に対し, $v(x, t)$ を $v(x, 0) = \mathcal{U}(x, x) + \varepsilon\phi(x)$ を初期値とする (4.4) の解とする. このとき, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し, $h = h(\varepsilon)$ が存在して,

$$\|v(\cdot, t) - \mathcal{U}(\cdot + h, \cdot + st)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq Me^{-\nu t}, \quad t \geq 0 \quad (4.6)$$

が成り立つ ($\exists M > 0, \exists \nu > 0$).

証明には, 一様環境の場合の Sattinger [50] の方法に基づき, 重み付きの関数空間を用いている.

4.2 比較定理を用いた漸近安定性の証明

すでに述べたが, 空間一様な場合の双安定型反応拡散方程式

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.7)$$

の進行波 $\varphi(x - c_b t)$ の (指数的大域) 漸近安定性は Fife-McLeod により証明されている. その手法は, (4.7) に対する比較定理と動座標系で見た方程式

$$u_t = u_{\xi\xi} + c_b u_\xi + f(u), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.8)$$

に対する次のリヤプノフ関数の存在を用いるというものである:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{c_b \xi} \left\{ \frac{1}{2} u_\xi^2 - [F(u) - F(1)H(-\xi)] \right\} d\xi \right) = - \int_{\mathbb{R}} e^{c_b \xi} u_t^2 d\xi \leq 0. \quad (4.9)$$

ただし, $F(u) := \int_0^u f(s)ds$ であり, H は Heaviside 関数である. しかし, 空間周期的な場合は, 動座標系で見た方程式 (4.4) は周期解を持つので, リヤプノフ関数は存在するはずもない.

Xinfu Chen [9] は, 同じくリヤプノフ関数を持たない, 非局所項を持つ空間 1 次元の発展方程式に対し, 比較定理のみを利用して進行波の指数的大域漸近安定性を証明している. 彼の開発した手法は, 比較定理の成立する空間的に一様な双安定型の反応拡散系の場合に拡張され, 単調なプロファイルを持つ進行波の指数的大域漸近安定性が示されている.

また, Ogiwara-Matano [45] は, 非コンパクト群の作用する順序保存力学系の一般論の枠組みで進行波の安定性を論じ, さらに, (3.1) に対しては, [9] の手法を発展させて適切な優解・劣解を構成することで, $t \in \mathbb{R}$ に関して単調な進行波は (局所) 漸近安定であることを示した. これにより, Xin が構成した (3.1) の進行波は (局所) 漸近安定であることがわかる. ただし, 一般論のため指数的大域収束に関する情報は全く得られない.

[9] で用いられた手法を空間非一様な反応拡散方程式に対しても使えるように修正することにより, 進行フロント波の L^∞ -位相における大域的指数漸近安定性を示すことができる.

Theorem 4.3 ([42]) (4.1) の解 $u(x, t)$ が $t = 0$ において

$$0 \leq u(x, 0) \leq 1, \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} u(x, 0) < \alpha < \liminf_{x \rightarrow -\infty} u(x, 0) \quad (4.10)$$

をみたすとする. このとき, $\tau \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\nu > 0$ が存在して,

$$\|u(\cdot, t) - U(\cdot, t + \tau)\|_\infty \leq M e^{-\nu t} \quad (\forall t \geq 0) \quad (4.11)$$

が成り立つ.

証明は基本的には比較定理しか利用しない. 鍵となる 3 つの補題を以下に挙げる.

Lemma 4.4 $\zeta(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ が次をみたすとする:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x \geq 4) \end{cases}, \quad 0 \leq \zeta' \leq 1, \quad |\zeta''| \leq 1.$$

このとき, $0 < \forall \varepsilon < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}/2$ に対し, $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$, $k = k(\varepsilon) > 0$ が存在して,

$$w^+(x, t) := 1 + \varepsilon - \{1 - (\alpha - 2\varepsilon)e^{-\lambda t}\}\zeta(\lambda(x - kt - x_+)) \quad (4.12)$$

$$w^-(x, t) := -\varepsilon + \{1 - (1 - \alpha - 2\varepsilon)e^{-\lambda t}\}\zeta(-\lambda(x + kt - x_-)) \quad (4.13)$$

は $\forall x_\pm \in \mathbb{R}$ に対して優解, 劣解になる.

Lemma 4.5 $U(x, t)$ を進行波とする. このとき, $\exists \beta > 0, \sigma > 0, \delta_0 > 0$ が存在して, $\forall \delta \in (0, \delta_0), \forall \tilde{t} \in \mathbb{R}$ に対し

$$W^+(x, t) := U(x, t + \tilde{t} + \delta(1 - e^{-\beta t})) + \sigma \delta e^{-\beta t} \quad (4.14)$$

$$W^-(x, t) := U(x, t + \tilde{t} - \delta(1 - e^{-\beta t})) - \sigma \delta e^{-\beta t} \quad (4.15)$$

は優解, 劣解になる.

Lemma 4.6 $\exists C = C(D, f) > 0, \exists \rho = \rho(D) > 0$ が存在して, $\forall x_0 \in \mathbb{R}, R > 0, r > 0$, および $u^+(x, 0) \geq u^-(x, 0)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) をみたす任意の優解 $u^+(x, t)$, 劣解 $u^-(x, t)$ に対し,

$$\min_{|x-x_0| \leq R} \{u^+(x, 1) - u^-(x, 1)\} \geq C e^{-\rho(R+r)} \int_{|\xi-x_0| \leq r} \{u^+(\xi, 0) - u^-(\xi, 0)\} d\xi.$$

Remark 4.7

- (a) Lemma 4.4 は, [9] で用いられたものと全く同じである. D が x に依存しても, λ, k を調整して比較関数にすることができる.
- (b) Lemma 4.5 の比較関数は [9] で用いられたものを空間周期的な場合に拡張したもので, [45] において進行波の (リャプノフ) 安定性を示すのに用いられた. 実際, $\|u(\cdot, 0) - U(\cdot, 0)\|_\infty \leq \sigma \delta$ ($\delta \in (0, \delta_0)$) のとき,

$$U(x, 0) - \sigma \delta \leq u(x, 0) \leq U(x, 0) + \sigma \delta, \quad x \in \mathbb{R}$$

が成り立つので, Lemma 4.5 および比較定理により

$$U(x, t - \delta(1 - e^{-\beta t})) - \sigma \delta e^{-\beta t} \leq u(x, t) \leq U(x, t + \delta(1 - e^{-\beta t})) + \sigma \delta e^{-\beta t}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

を得る. したがって,

$$U(x, t) - \|U_t\|_\infty \delta(1 - e^{-\beta t}) - \sigma \delta e^{-\beta t} \leq u(x, t) \leq U(x, t) + \|U_t\|_\infty \delta(1 - e^{-\beta t}) + \sigma \delta e^{-\beta t}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

よって, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon / (\|U_t\|_\infty + \sigma)$ ととれば,

$$U(x, t) - \varepsilon \leq u(x, t) \leq U(x, t) + \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

すなわち, $\|u(\cdot, t) - U(\cdot, t)\|_\infty \leq \varepsilon$ が得られる.

同様の比較関数は空間一様な双安定型反応拡散系の安定性, 漸近安定性を示すのに広く用いられている ([45], [52], [54] など).

- (c) Lemma 4.6 は, $D(x) \equiv \text{Const.}$ の場合は熱核 (heat kernel) の下からの評価により容易に導ける. $D(x) \neq \text{Const.}$ の場合は変数変換により定数係数の場合に帰着させる (変数係数の場合の基本解に対する下からの評価 (Harnack の不等式) を用いても得られると思うが, かなり面倒であろう).

Theorem 4.3 の証明は, 3 ステップに分けて行われる.

Step 1 (4.10) をみたす解 $u(x, t)$ に対し, $\exists t_0 > 0, \tau_0 \in \mathbb{R}, h_0 > 0$ が存在して,

$$U(x, \tau_0) - \sigma \delta_0 \leq u(x, t_0) \leq U(x, \tau_0 + h_0) + \sigma \delta_0 \quad (4.16)$$

が成り立つ.

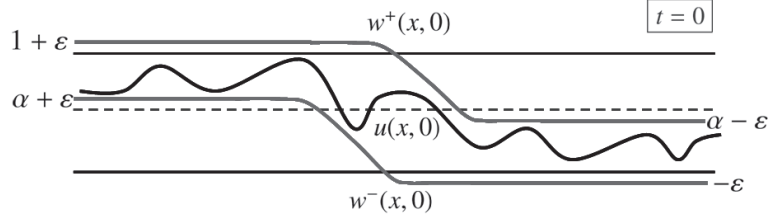


図 7: $t = 0$ の状態

(Proof) (4.10) より, $\varepsilon \in (0, \sigma\delta_0)$ と $x_{\pm} \in \mathbb{R}$ を

$$w^-(x, 0) \leq u(x, 0) \leq w^+(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}$$

をみたすようにとることができる (図 7 参照). したがって, Lemma 4.4 より

$$w^-(x, t) \leq u(x, t) \leq w^+(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

が成り立つが, $w^{\pm}$ の定義より,

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon - (1 - \alpha - 2\varepsilon)e^{-\lambda t} &\leq u(x, t) \leq 1 + \varepsilon, & x \approx -\infty \\ -\varepsilon &\leq u(x, t) \leq \varepsilon + (\alpha - 2\varepsilon)e^{-\lambda t}, & x \approx +\infty \end{aligned}$$

となるので, 十分大きい $t_0 > 0$ をとると適当な $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 > 0$ に対して (4.16) が成り立つようにできる (図 4.2 参照). ただし, この時点では, 時間のずれ h_0 は非常に大きい可能性がある.

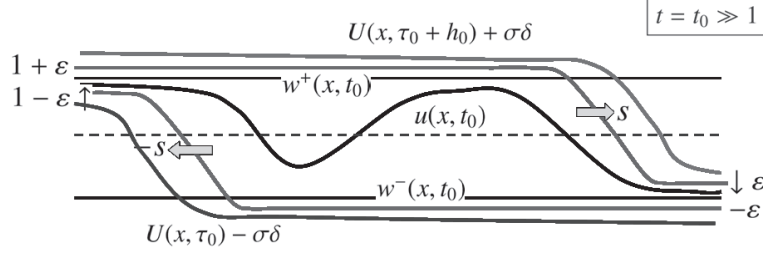


図 8: $t = t_0$ の状態

Step 2 $\exists \tau_0 \in \mathbb{R}$, $\exists h_0 > 0$ に対し

$$U(x, \tau_0) - \sigma\delta_0 \leq u(x, 0) \leq U(x, \tau_0 + h_0) + \sigma\delta_0 \quad (4.17)$$

をみたす初期値 $u(x, 0)$ に対し, $\tau \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - U(\cdot, t + \tau)\|_{\infty} = 0. \quad (4.18)$$

(Proof) この Step は, 部分的には Ogiwara-Matano による順序保存力学系の一般論の枠組みでの進行波の漸近安定性 ([45]) に含まれるが, 読者のために一般論を用いない証明の概略を記しておく.

(step 2-1) (4.17) および Lemma 4.5 より,

$$U(x, t + \tau_0 - \delta_0(1 - e^{-\beta t})) - \sigma\delta_0 e^{-\beta t} \leq u(x, t) \leq U(x, t + \tau_0 + h_0 + \delta_0(1 - e^{-\beta t})) + \sigma\delta_0 e^{-\beta t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (4.19)$$

(step 2-2) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $v_n(x) := u(x + n, nT)$ とおくと, $U(x + n, t + nT) = U(x, t)$ ($\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) より,

$$U(x, \tau_0 - \delta_0(1 - e^{-\beta nT})) - \sigma\delta_0 e^{-\beta nT} \leq v_n(x) \leq U(x, \tau_0 + h_0 + \delta_0(1 - e^{-\beta nT})) + \sigma\delta_0 e^{-\beta nT}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

(4.1) の解に対するアプリアリ評価より, $\|u_x\|_\infty$ は一様有界である. したがって任意の部分列 $\{v_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ に対し, $\mathbb{R}$ 上広義一様収束する部分列が存在し, その極限 v^* は次をみたす.

$$U(x, \tau_0 - \delta_0) \leq v^*(x) \leq U(x, \tau_0 + h_0 + \delta_0), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

(step 2-3) $\tau \in \mathbb{R}$ を

$$\tau := \inf\{s \in \mathbb{R} \mid v^*(x) \leq U(x, s) \ (\forall x \in \mathbb{R})\}$$

と定義すると, (4.21) より τ は well-defined であり, さらに $v^* \equiv U(\cdot, \tau)$ が成り立たなければならない. このように, 比較関数をぎりぎりまで解に近づけたときに両者が一致しなければならない(そうでないと, 比較定理より両者が離れてしまうのでぎりぎりまで近づけたことに反する) という議論は, 比較定理が成り立つ方程式系に対してよく用いられる. われわれの問題は有界領域の問題ではなく, 無限遠方で真に離れることはない(同じ値に漸近する) ので比較定理からすぐに得られるわけではないが, 無限遠方で離れるように少し値を持ち上げてから Lemma 4.5 を用い, 再度極限をとることで同様の議論ができる.

(step 2-4) $U_t > 0$ より, (step 2-3) の τ は部分列 $\{v_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ によらないことがわかる. これは背理法により示すことができるが, 一般の順序保存力学系において, 「 ω -極限集合の任意の 2 元には順序関係がない」ということから導ける. これにより,

$$v_n \rightarrow U(\cdot, \tau) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \mathbb{R} \text{ 上広義一様}$$

が示され, さらに (4.20) の $|x| \approx +\infty$ における評価より, この収束は $\mathbb{R}$ 上一様であることもわかる. したがって,

$$\|u(\cdot, nT) - U(\cdot, \tau + nT)\|_\infty = \|v_n(\cdot) - U(\cdot, \tau)\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

あとは補間して, (4.18) を得る.

Step 3 Step2 の収束は指数的である.

(Proof) Step2 より, 十分小さい任意の $h_1 > 0, \delta_1 \in (0, \delta_0)$ に対し, ある $t_1 \gg 1, \tau_1 \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$U(x, \tau_1) - \sigma\delta_1 \leq u(x, t_1) \leq U(x, \tau_1 + h_1) + \sigma\delta_1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.22)$$

が成り立つ. ここで単純に Lemma 4.5 を用いても

$$U(x, t + \tau_1 - \delta_1(1 - e^{-\beta t})) - \sigma\delta_1 e^{-\beta t} \leq u(x, t + t_1) \leq U(x, t + \tau_1 + h_1 + \delta_1(1 - e^{-\beta t})) + \sigma\delta_1 e^{-\beta t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \quad (4.23)$$

となり, δ_1 はいくらでも小さく取れるとはいえ優解と劣解の時間のずれは大きくなる. そこで, $0 \leq t \leq 1$ では Lemma 4.6 を用いて時間のずれを小さくし, $t \geq 1$ では Lemma 4.5 を用いると, 次の評価を得る:

$$U(x, t + \tau_2) - \sigma\hat{\delta}e^{-\beta t} \leq u(x, t + t_1) \leq U(x, t + \tau_2 + h_2) + \sigma\hat{\delta}e^{-\beta t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 1. \quad (4.24)$$

ただし, $\tau_2, h_2, \hat{\delta}$ は τ_1, h_1, δ_1 には依存しない定数 $\delta_* > 0$ を用いて

$$\tau_2 \in [\tau_1 - \delta_1, \tau_1 - \delta_1 + 2\delta_* h_1], \quad h_2 = (1 - \delta_*)h_1 + 2\delta_1, \quad \hat{\delta} = \delta_1 + \delta_* h_1 e^\beta \quad (4.25)$$

と表される. ここで注目すべき点は, h_2 は Lemma 4.5 のみを用いた場合の時間のずれの最大値 $h_1 + 2\delta_1$ よりも真に小さくなっていることである (その分 $\hat{\delta}$ が δ_1 よりも大きくなっているが, この項はやはり指数的に減衰する).

h_1, δ_1 は任意に小さく取れ, また δ_* は τ_1, h_1, δ_1 によらないので,

$$\delta_1 = \frac{\delta_*}{4} h_1, \quad (1 + 4e^\beta) \exp(-\beta t_*) = 1 - \frac{\delta_*}{2}$$

となるように h_1, δ_1 および $t_* > 1$ を定めると,

$$U(x, t_* + \tau_2) - \sigma\delta_2 \leq u(x, t_1 + t_*) \leq U(x, t_* + \tau_2 + h_2) + \sigma\delta_2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 1. \quad (4.26)$$

が

$$h_2 = r_* h_1, \quad \delta_2 = r_* \delta_1 \quad \left(r_* = 1 - \frac{\delta_*}{2} \in (0, 1) \right)$$

として成り立つ. この議論を繰り返すと, $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し

$$U(x, kt_* + \tau_{k+1}) - \sigma\delta_{k+1} \leq u(x, t_1 + kt_*) \leq U(x, kt_* + \tau_{k+1} + h_{k+1}) + \sigma\delta_{k+1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.27)$$

が

$$\tau_{k+1} \in [\tau_k - \delta_k, \tau_k - \delta_k + 2\delta_* h_k], \quad h_{k+1} = r_*^k h_1, \quad \delta_{k+1} = r_*^k \delta_1$$

として成り立つことがわかる. つまり, 時間のずれ h_k と値のずれ δ_k はそれぞれ指数的に減衰する. また, 定義より τ_k はある値 $\tau \in \mathbb{R}$ に指数的に収束する. あとは, t について補間することにより指数的収束 (4.11) が得られる. このとき, 減衰の指数オーダー ν は次で与えられる.

$$\nu = -\frac{\log r_*}{t_*} > 0. \quad (4.28)$$

Remark 4.8 上記の比較定理を用いた漸近安定性の証明では, (2.16) のような進行波 $U(x, t)$ の無限遠方での指数的減衰は全く必要なく, 単に

$$U(x, t) \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad U(x, t) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty), \quad U_t(x, t) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow +\infty) \quad (4.29)$$

という性質のみを利用する.

5 周期的環境を伝播する進行波の速度

5.1 速度の特徴づけ

本節では, 空間周期的な係数を持つ単独の反応拡散方程式

$$u_t = (D(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (5.1)$$

の進行波 $U(x, t) = \mathcal{U}(x - st, x)$ の (最小) 平均速度 s について考察する.

5.1.1 単安定型の場合

空間周期的な係数を持つ単安定型の反応拡散方程式に対しては, より一般の方程式

$$u_t = \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x) \cdot \nabla u + f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

に対する最小平均速度の特徴づけが, Berestycki-Hamel [5] により証明されている. それを (5.1) に適用すると, 最小平均速度 $s_m = s_m(e_1)$ は

$$s_m = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} \quad (5.2)$$

で与えられる. ただし, $k(\lambda)$ は 1-周期関数 ψ に対し

$$L_\lambda \psi := (D(x)\psi_x)_x - 2\lambda D(x)\psi_x + \{-\lambda D'(x) + \lambda^2 D(x) + f'(0)\}\psi$$

で定義される作用素の第 1 固有値である. 例えば, $D(x) \equiv 1$ のときは, $k(\lambda) = \lambda^2 + f'(0)$ となり, (5.2) の右辺は一樣な場合の最小速度 $2\sqrt{f'(0)}$ となる. (5.2) のような固有値問題による最小平均速度の特徴づけは非常に強力で, 方程式の空間非一樣性が最小平均速度に与える影響がさまざまな場合に調べられている ([6]). その際に, $u \in (0, 1)$ に対して $f(u) > 0$ が成り立つことも大きなアドバンテージとなっている.

5.1.2 双安定型の場合

空間周期的な係数を持つ双安定型の反応拡散方程式に対しても、すでに見たように、より一般の方程式

$$u_t = \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x) \cdot \nabla u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

の場合に、 $A(x)$, $q(x)$ がそれぞれ定数行列、0 ベクトルに十分近い場合、すなわち非一様性が弱い場合に e 方向に進む進行波の平均速度 $s_b(e)$ が一意に定まる。 $q \equiv 0$ の場合は、 $s_b(e)$ のミニマックス原理による変分的な特徴づけが Heinze-Papanicolaou-Stevens [20] によって得られており、それを (5.1) に適用すると、進行波の速度 $s_b = s_b(e_1)$ は、

$$\sup_{\psi \in K} \inf_{(x,t) \in \mathbb{R}^2} H[\psi](x,t) = s_b = \inf_{\psi \in K} \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^2} H[\psi](x,t) \quad (5.3)$$

と特徴づけられる。ただし、

$$K := \left\{ \psi \mid 0 < \psi < 1, \psi_t > 0, \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \psi(x,0) < a < \underline{\lim}_{x \rightarrow -\infty} \psi(x,0), \psi(x,t+1) = \psi(x-1,t) \right\} \quad (5.4)$$

$$H[\psi](x,t) := \frac{(D(x)\psi_x)_x + f(\psi(x,t))}{\psi_t(x,t)} \quad (5.5)$$

である (K の定義において、Theorem 3.6 を利用している)。例えば $D \equiv 1$ のときは、速度 c_b の進行波のプロファイル ϕ を用いて $\psi(x,t) = \phi(x-t)$ としたものがミニマックス値 c_b を達成するテスト関数となっている (このとき、 $H[\psi](x,t) \equiv c_b$)。 $D(x)$ が周期関数の場合も、適切なテスト関数 $\psi \in K$ を見つけて (5.3) を用いて進行波の速度を上下から評価することができるが、精密な評価が得られるケースは限られる。

5.1.3 数値的考察

非一様な環境が進行波の伝播速度に与える影響を調べるためには、(最小) 平均速度の評価が必要になるが、双安定型非線形項に対する解析は単安定型の場合に比べて進んでいないのが現状である。その理由は、まさに非線形項の「双安定性」に由来していると考えられる。つまり、双安定型のフロント波は、前方と後方で安定状態がお互いにフロントを押し合っているような状況であり、押す力が強い方に進んでいる。ところが、押す力の差 (数学的には、ポテンシャルの井戸の深さの差) が小さい場合には環境の変動の影響も加わり、その差が相殺されてしまう可能性がある。事実、前述のように、非一様性が強くなると安定平衡解が存在して解の空間伝播をブロックしてしまう (図 9 の右側のグラフで、 $r = 0.4, 0.5$ の場合を参照)。単安定型の場合は、非一様性の影響が強くなっても後方の平衡状態のみが安定である状況に変わりはなく、前方が引っ張り後方が押すことになる。実際、単安定型と双安定型の違いは下図の数値例からも明らかであり、双安定型の場合に環境の変化が進行波の速度に与える影響は、環境変化のスケールと進行波のフロント幅との相関に強く依存していることが示唆される。

右のグラフを見ると、周期的環境における双安定型フロント波の速度は、 k が大きいとき (すなわち、環境が非常に激しく変化している場合) と k が小さいとき (すなわち、環境が非常にゆっくり変化している場合) は 0 にならないことが示唆される。以下では、それぞれの場合について環境の変動が進行波の速度に与える影響について考察する。

5.2 rapidly oscillating media と均質化 (homogenization)

本節では、環境変化が非常に激しい場合、すなわち微小パラメータ $\varepsilon > 0$ を含む双安定型反応拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u) \quad (5.6)$$

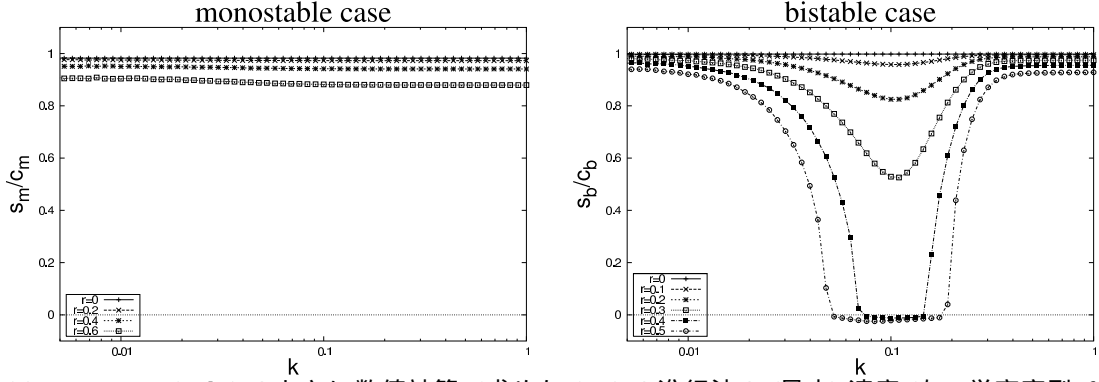


図 9: $D(x) = 1 + r \sin(2\pi kx)$ のときに数値計算で求めた (5.1) の進行波の (最小) 速度 (左: 単安定型 $f(u) = 0.01u(1-u)$, 右: 双安定型 $f(u) = u(1-u)(u-0.45)$). 横軸は k (対数スケール), 縦軸は一樣な場合 ($r = 0$) の (最小) 速度との比.

の進行波の速度 s_b の極限を漸近展開を利用して求めてみる. 基本的な考え方は, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で (5.6) を近似する空間的に一樣な問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u) \quad (5.7)$$

を求めることである. (5.6) において単純に $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えようとしても, 係数 $D(x/\varepsilon)$ は ε が小さくなるにつれて激しく振動するため, 各点収束の意味で極限を考えることはできないことに注意する. このように, 空間的に激しく振動する係数を持つ (偏) 微分作用素を何らかの意味で近似する空間一樣な係数を持つ (偏) 微分作用素を求める数学的手法を均質化法と呼び, 工学の分野で盛んに用いられている. 例えば, 複合材料においては, 導電率や弾性係数などの物理パラメータが異なる材料間で不連続に変化している. その結合がミクロスケールであればパラメータの値は激しく変動し, 材料の局所構造は複雑になる. 一方で, そのような複合材料のミクロな構造が材料全体の物理的特性に影響することはよく知られている. 均質化法により, このような複合材料において物理現象を考察する際に, マクロな特性がほぼ「等価」な均質材料を仮想的に求めることができる. 均質化法の数学的理論は, J. L. Lions, Murat, Tartar らによって応用数学における理論体系の 1 つとして展開されてきた. 均質化法の数学的な取り扱いやさまざまな問題への適用例については, [4], [49], [24], [22]などを参照されたい.

(5.6) の微分作用素の場合, D_0 は D の調和平均

$$\langle D \rangle_H := \left(\int_0^1 \frac{dx}{D(x)} \right)^{-1} = \left\langle \frac{1}{D} \right\rangle_A \quad (5.8)$$

になることが知られている. 以下, このことを形式的な漸近展開で確認してみよう.

$\xi = x - st$ (一定速度 s で動く動座標), $z = x/\varepsilon$ (ミクロ構造を記述する座標) とおき, 進行波 $U(x, t)$ および平均速度 s について

- $U(x, t) = u_0(\xi, z) + \varepsilon u_1(\xi, z) + \varepsilon^2 u_2(\xi, z) + \cdots$ ($u_j(\xi, z)$ は z に関して 1-周期的).
- $s = s_0 + \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \cdots$.
- ξ と z は独立な変数であるとみなす (このとき, $\partial_t = -s\partial_\xi$, $\partial_x = \partial_\xi + \varepsilon^{-1}\partial_z$ となる).

を仮定する. 上記の漸近展開を方程式に代入すると, 次を得る.

$$-(s_0 + \varepsilon s_1 + \cdots) \partial_\xi (u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots) = (\partial_\xi + \varepsilon^{-1} \partial_z) \left(D(z) (\partial_\xi + \varepsilon^{-1} \partial_z) (u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots) \right) + f(u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots). \quad (5.9)$$

これを展開し, 両辺の ε の次数が同じ項を等しいとおいて低次の項から順次係数を求めていく.

$O(\varepsilon^{-2})$

$$0 = \partial_z(D(z)\partial_z u_0)$$

より,

$$D(z)\partial_z u_0 = \exists p(\xi).$$

両辺を $D(z)$ で割って z に関して積分平均をとると, z に関する周期性より $p(\xi) \equiv 0$ を得るので, $\partial_z u_0 = 0$, すなわち

$$u_0 = u_0(\xi). \quad (5.10)$$

 $O(\varepsilon^{-1})$

$$0 = \partial_z(D(z)(\partial_\xi u_0 + \partial_z u_1))$$

より,

$$D(z)(\partial_\xi u_0 + \partial_z u_1) = \exists q(\xi).$$

両辺を $D(z)$ で割って z に関して積分平均をとると (5.10) より, $\frac{du_0}{d\xi} = q(\xi)\langle 1/D \rangle_A$, すなわち

$$q(\xi) = \langle D \rangle_H \frac{du_0}{d\xi}. \quad (5.11)$$

 $O(1)$

$$-s_0 \partial_\xi u_0 = \partial_\xi(D(z)(\partial_\xi u_0 + \partial_z u_1)) + \partial_z(D(z)(\partial_\xi u_1 + \partial_z u_2)) + f(u_0)$$

の両辺の z に関する積分平均をとると, (5.10), (5.11) より,

$$\langle D \rangle_H \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} + s_0 \frac{du_0}{d\xi} + f(u_0) = 0 \quad (5.12)$$

を得る. これは空間一様な係数を持つ反応拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \langle D \rangle_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (5.13)$$

の進行波のプロファイルがみたす方程式と同じであるから, 一意性より次を得る:

$$u_0(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{\sqrt{\langle D \rangle_H}}\right), \quad s_0 = c_b \sqrt{\langle D \rangle_H}.$$

このように, 均質化法に基づく漸近展開で解の主要項を求めるためには, 展開式 (5.9) において ε の次数の低い方から数えて最初の3項を計算する必要がある. 問題によっては, 環境の不均質性が解の性質に与える影響を調べるためにはより高次の項を求める必要が生じるが, 次数が高くなるにつれて極めて困難な作業になることに注意されたい³.

上記の考察により, (5.6) の進行波 $U(x, t)$ の ε に関する漸近展開は

$$U(x, t) \sim \varphi\left(\frac{x - s_0 t}{\sqrt{\langle D \rangle_H}}\right) + O(\varepsilon) \quad (5.14)$$

と表され, $\varepsilon \rightarrow 0$ において (少なくとも形式的には) (5.13) の速度 $s_0 = c_b \sqrt{\langle D \rangle_H}$ を持つ進行波に漸近することがわかる. u_1 以降の項は変数 z に依存し, $\varepsilon \rightarrow 0$ のときに激しく振動することが予想される. しかし, 陰関数定理を用いた数学的正当化が Heinze [19] によりなされており, その結果を利用すると, $\varepsilon > 0$ が非常に小さいとき (すなわち, 環境変化が非常に激しい場合) に (5.6) の進行波 $U^\varepsilon(x, t)$ が存在し, それが均質化極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ で得られる進行波 (すなわち, 漸近展開 (5.14) の主要項) まで適切な関数空間内で接続されていることになる (ただし彼の結果は, 空間周期的に激しく振動する境界形状を持つ N 次元シリンダー領域上の空間的に一様な反応拡散方程式に対するものであることに注意する. $\mathbb{R}^N$ における空間周期的な係数を持つ方程式に対しても適用可能であるとコメントされているが, 厳密にはチェックする必要がある).

³例えば, (5.9) の $O(\varepsilon)$ の項を計算して, c_1, u_1 を求められるかどうか考えてみよう.

上記の均質化法は, 単安定型の場合にも (数学的な裏づけはないが) 適用することができ, 数理生物モデルに適用して既存の結果 ([51], [28], [29]) と同じ平均速度の式が極めて平易な計算で求まることがわかっている ([40]).

5.3 slowly varying media と 特異極限 (singular limit)

今度は, 環境変化が非常にゆっくりの場合, すなわち微小パラメータ $\varepsilon > 0$ を含む次の双安定型反応拡散方程式の進行波の速度について考察する:

$$u_t = (D(\varepsilon x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.15)$$

拡散係数 $D(\varepsilon x)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $D(0)$ に広義一様収束する (しかも, 微分は一様収束する) が, 進行波の速度は $D(0)$ のみで決まるわけではないことを以下示す.

変数変換 $x \mapsto x/\varepsilon, t \mapsto t/\varepsilon$ によって進行波の速度是不変なので,

$$\varepsilon u_t = \varepsilon^2 (D(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (5.16)$$

について議論すればよい. さらに変数変換

$$y = Y(x) := \int_0^x \frac{dr}{\sqrt{D(r)}} \quad (5.17)$$

を施すと, (5.16) は次の方程式に変換される.

$$\varepsilon u_t = \varepsilon^2 u_{yy} + \varepsilon^2 b(y)u_y + f(u), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (5.18)$$

ただし,

$$b(y) = \frac{D'(Y^{-1}(y))}{2\sqrt{D(Y^{-1}(y))}} \quad (5.19)$$

は y の周期関数で, その周期 l は次で与えられる:

$$l = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{D(r)}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{D}} \right\rangle_A. \quad (5.20)$$

さらに, b の積分平均は

$$\langle b \rangle_A := \frac{1}{l} \int_0^l b(y)dy = \frac{1}{l} \left[\log \sqrt{D(Y^{-1}(y))} \right]_0^l = 0 \quad (5.21)$$

となる. このとき, $U^\varepsilon(x, t)$ を (5.16) の進行波解, s^ε をその速度とすると, $\tilde{U}^\varepsilon(y, t) := U^\varepsilon(Y^{-1}(y), t)$ は (5.18) の速度 ls^ε を持つ進行波解となることが容易に確かめられる.

$\varepsilon > 0$ が非常に小さいとき, $\tilde{U}^\varepsilon$ は値が急激に変化する (すなわち, 傾きの絶対値が非常に大きい) 部分 (内部遷移層) を持つ. 内部遷移層の場所をフロントの位置とみなし $y = P^\varepsilon(t)$ と表すことにする (より正確には, $\tilde{U}^\varepsilon$ の値が α になる y を $P^\varepsilon(t)$ と表す). 内部遷移層の近辺を引き伸ばす変数

$$\eta = \frac{y - P^\varepsilon(t)}{\varepsilon} \quad (5.22)$$

を導入し, $\tilde{U}^\varepsilon(y, t)$ および $P^\varepsilon(t)$ が

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\varepsilon(y, t) &= U_0(\eta, t) + \varepsilon U_1(\eta, t) + \varepsilon^2 U_2(\eta, t) + \cdots, \\ P^\varepsilon(t) &= P_0(t) + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + \cdots, \end{aligned} \quad (5.23)$$

のように展開されるとする. ただし,

$$\widetilde{U}^\varepsilon(-\infty, t) = 1, \quad \widetilde{U}^\varepsilon(+\infty, t) = 0, \quad \widetilde{U}^\varepsilon(P^\varepsilon(t), t) = \alpha \quad (5.24)$$

より, すべての t に対し

$$U_0(-\infty, t) = 1, \quad U_0(+\infty, t) = 0, \quad U_0(0, t) = \alpha \quad (5.25)$$

$$U_k(\pm\infty, t) = 0, \quad U_k(0, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.26)$$

を要請する. (5.23) を (5.18) に代入し, 前節と同じように両辺の ε の次数が同じ項を等しいとおいて低次の項から順次係数を求めていく.

$O(1)$

ε^0 の項を集めると次を得る:

$$U_{0\eta\eta} + P'_0(t)U_{0\eta} + f(U_0) = 0. \quad (5.27)$$

これは, t をパラメータと考えると, 一様な場合の進行波のプロファイルがみたす方程式と同じ形をしている. よって (5.25) を考慮すると,

$$U_0(\eta, t) = \varphi(\eta), \quad P'_0(t) = c_b. \quad (5.28)$$

(5.28) は進行波 $\widetilde{U}(y, t)$ が $\varepsilon \rightarrow 0$ において

$$\widetilde{U}(y, t) \sim \varphi\left(\frac{x - c_b t - x_0}{\varepsilon}\right)$$

と (少なくとも形式的には) 近似されることを示している. したがって, (5.16) の進行波 $U(x, t)$ の平均速度 s^ε は,

$$s^\varepsilon \sim \frac{c_b}{l} = c_b \langle \sqrt{D} \rangle_H$$

と近似されることになる.

方程式 (5.16) において, 環境変化 (すなわち, D の空間変化) の影響は進行波の漸近展開の主要項に現れているが, (5.18) においては, (5.28) のように主要項には b の変化の影響は現れていない. そこで, 漸近展開の高次項を求めてみる. その際に必要なのは, 次の事実である.

Lemma 5.1 (φ, c) を一様な場合の進行波とし, $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $A(\eta)$ がある $\mu > 0$ に対して $A(\eta) = O(e^{-\mu|\eta|})$ ($|\eta| \rightarrow \infty$) をみたすとする. このとき,

$$\begin{cases} \Psi_{\eta\eta} + c\Psi_\eta + f'(\varphi(\eta))\Psi = A(\eta), & \eta \in \mathbb{R}, \\ \Psi(0) = 0, \end{cases} \quad (5.29)$$

が $\mathbb{R}$ 上有界な解を持つための必要十分条件は, 次で与えられる.

$$\int_{\mathbb{R}} A(\eta)\varphi'(\eta)e^{c\eta}d\eta = 0.$$

さらに, その有界な解は

$$\Psi(\eta) = \varphi'(\eta) \int_0^\eta \varphi'(y)^{-2} e^{-cy} \left\{ \int_{-\infty}^y A(z)\varphi'(z)e^{cz}dz \right\} dy,$$

で与えられ, $\Psi(\eta), \Psi'(\eta), \Psi''(\eta) = O(e^{-\mu|\eta|})$ ($|\eta| \rightarrow \infty$) をみたす.

この Lemma は難しく言えば Fredholm の交代定理だが, ODE なので定数変化法を用いて具体的に解くことにより示すことができる.

$O(\varepsilon)$

ε^1 の項を集め, さらに (5.28) を用いると次が得られる:

$$U_{1\eta\eta} + cU_{1\eta} + f'(\varphi(\eta))U_1 = -\{P'_1(t) + b(P_0(t))\}\varphi'(\eta). \quad (5.30)$$

(5.26) を考慮し, Lemma 5.1 の可解条件を適用すると,

$$U_1(\eta, t) \equiv 0, \quad P'_1(t) = -b(P_0(t)). \quad (5.31)$$

したがって, 進行波の漸近展開の最初の 2 項は,

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\varepsilon(y, t) &= \varphi\left(\frac{y - P^\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dP^\varepsilon}{dt}(t) &= c_b - \varepsilon b(P^\varepsilon(t)) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (5.32)$$

と決まり, $O(\varepsilon)$ の項に b の空間変化の影響が現れることがわかる. ところが, 進行波の平均速度 s^ε を計算してみると, $O(\varepsilon)$ の項には b の影響は現れないことが次のように示される: $T_\varepsilon > 0$ を $P^\varepsilon(T_\varepsilon) = P^\varepsilon(0) + l$ (l は $b(y)$ の周期) をみたすようにとると, $\tilde{U}^\varepsilon$ の平均速度 $\tilde{s}^\varepsilon$ は $\tilde{s}^\varepsilon = l/T_\varepsilon$ と表せるので,

$$\tilde{s}^\varepsilon = \frac{l}{T_\varepsilon} = \left(\frac{1}{l} \int_{p(0)}^{p(0)+l} \frac{dP}{c_b - \varepsilon b(P) + O(\varepsilon^2)} \right)^{-1} \quad (5.33)$$

ところが, b の平均 $\langle b \rangle_A$ が 0 であることから, 上式の右辺を ε について展開すると

$$\tilde{s}^\varepsilon \sim c_b + O(\varepsilon^2) \quad (5.34)$$

となってしまう, $b(y)$ の空間変化の影響はさらに高次項を計算しないと現れないことになる.

$O(\varepsilon^2)$

ε^2 の項を集め, さらに (5.28), (5.31) を用いると次が得られる:

$$U_{2\eta\eta} + cU_{2\eta} + f'(\varphi(\eta))U_2 = -\{P'_2 + b'(P_0)(P_1 + \eta)\}\varphi'(\eta). \quad (5.35)$$

(5.26) を考慮し, Lemma 5.1 の可解条件を適用すると,

$$U_2(\eta, t) = b'(P_0(t))V(\eta), \quad P'_2(t) = -b'(P_0)(P_1 + \gamma). \quad (5.36)$$

ただし, 定数 γ および関数 $V(\eta)$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi'(\eta)^2 e^{c\eta} d\eta}{\int_{\mathbb{R}} \varphi'(\eta)^2 e^{c\eta} d\eta}, \\ V(\eta) &= \varphi'(\eta) \int_0^\eta \varphi'(y)^{-2} e^{-cy} \left\{ \int_{-\infty}^y (\gamma - z) \varphi'(z)^2 e^{cz} dz \right\} dy. \end{aligned}$$

よって, 進行波の漸近展開は,

$$\tilde{U}^\varepsilon(y, t) = \varphi\left(\frac{y - P^\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 b'(P^\varepsilon(t))V\left(\frac{y - P^\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^3), \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned}\frac{dP^\varepsilon}{dt} &= c_b - \varepsilon b(P_0(t)) - \varepsilon^2 b'(P_0(t))(P_1(t) + \gamma) + \cdots, \\ &= c_b - \varepsilon b(P^\varepsilon(t)) - \varepsilon^2 \gamma b'(P^\varepsilon(t)) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}\tag{5.38}$$

となる. このとき, $\langle b \rangle_A = 0$, $\langle b' \rangle_A = 0$ より,

$$\tilde{s}^\varepsilon = \frac{l}{T_\varepsilon} = \left(\frac{1}{l} \int_{p(0)}^{p(0)+l} \frac{dP}{c_b - \varepsilon b(P) - \varepsilon^2 \gamma b'(P) + O(\varepsilon^3)} \right)^{-1}\tag{5.39}$$

$$= c_b \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c_b^2} \langle b^2 \rangle_A + O(\varepsilon^3) \right)\tag{5.40}$$

を得る. これはあくまでも形式的漸近展開であるが, 適切な比較関数を構成することにより正当化することができる.

Theorem 5.2 ([41]) $\varepsilon_0 > 0$, $M > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対し (5.18) の進行波 $\tilde{U}$ の平均速度 $\tilde{s}^\varepsilon$ は次のように評価される.

$$\left| \tilde{s}^\varepsilon - \left(c_b - \frac{\langle b^2 \rangle_A}{c_b} \varepsilon^2 \right) \right| \leq M \varepsilon^3.\tag{5.41}$$

$b \neq 0$ のとき $\langle b^2 \rangle_A > 0$ であるから, 上の定理は (5.18) の進行波の平均速度 $\tilde{s}^\varepsilon$ が一様な環境 ($b \equiv 0$) の場合の進行波の速度 c_b よりも真に遅くなることを示している. また, $\tilde{s}^\varepsilon = l s^\varepsilon$ および

$$\langle b^2 \rangle_A = \frac{1}{4l} \left\langle \frac{(D')^2}{D^{3/2}} \right\rangle_A$$

より, (5.16) (および, (5.15)) の進行波の平均速度 s^ε は次のように評価できる.

$$\left| s^\varepsilon - \left(c_b \langle \sqrt{D} \rangle_H - s_2 \varepsilon^2 \right) \right| \leq M \varepsilon^3.$$

ただし, s_2 は次で与えられる正定数である:

$$s_2 = \frac{\langle \sqrt{D} \rangle_H^2}{4c_b} \left\langle \frac{(D')^2}{D^{3/2}} \right\rangle_A.$$

Remark 5.3

(i) [39] では, (5.41) の右辺は $O(\varepsilon^3 |\log \varepsilon|^2)$ であったが, 上記のように改良することができる.

(ii) 進行波の漸近展開 (5.37) を利用して, Heinze-Papanicolaou-Stevens の方法で速度の評価を試みる. テスト関数 $\psi \in K$ として,

$$\psi(x, t) := \varphi \left(\frac{Y(x) - lt}{\varepsilon} \right)\tag{5.42}$$

をとると,

$$H[\psi](x, t) = \frac{\varepsilon^2 (D(x) \psi_x)_x + f(\psi)}{\varepsilon \psi_t} = \frac{1}{l} \left\{ c_b - \varepsilon (\sqrt{D(x)})' \right\}.\tag{5.43}$$

これより,

$$\langle \sqrt{D} \rangle_H \left\{ c_b - \varepsilon \max_{x \in \mathbb{R}} (\sqrt{D(x)})' \right\} \leq s^\varepsilon \leq \langle \sqrt{D} \rangle_H \left\{ c_b - \varepsilon \min_{x \in \mathbb{R}} (\sqrt{D(x)})' \right\}\tag{5.44}$$

という評価が得られる. ところが, さらに精密な評価を得ようとして

$$\psi(x, t) := \varphi \left(\frac{Y(x) - lt}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 b'(lt) V \left(\frac{Y(x) - lt}{\varepsilon} \right)\tag{5.45}$$

とすると, $\psi(x, t+1) = \psi(x-1, t)$ はみたされるが, V の定義式を見ると φ' よりも V, V' の方が遠方での減衰が遅いので, $\psi_t > 0$ が保証されない. したがって, (5.37) を利用して比較定理を用いた方法と同じ精度の評価を得ることは難しいと考えられる.

Remark 5.4 空間周期的な境界形状を持つ無限に長いシリンダー領域 $\Omega_\sigma \subset \mathbb{R}^N$ において, 次の双安定型反応拡散系を考える:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon^2 \Delta u + f(u), & x \in \Omega_\sigma, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\sigma, t > 0. \end{cases} \quad (5.46)$$

また, 領域

$$\Omega_\sigma := \{(x, \sigma y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} \mid y = (y_1, \dots, y_{N-1}) \in \omega(x)\}$$

は図 10 のように, x 方向に周期的な断面 $\sigma\omega(x)$ を持つとする. $\sigma > 0$ は断面の‘太さ’をコントロールするパラメータである.



図 10: 領域 Ω_σ

$\omega(x)$ が x によらず一定の場合, すなわちシリンダー形状が一様な場合, 1 次元進行波 (φ, c_b) を利用して y 方向に一様なプロファイルを持つ (5.46) のフロント進行波

$$\varphi\left(\frac{x - c_b t}{\varepsilon}\right)$$

が構成できる. σ が非常に小さいとき (すなわち, シリンダーが非常に細いとき), (5.46) の解のダイナミクスは次の 1 次元問題で近似できることが知られている ([18], [62]).

$$\varepsilon u_t = \frac{\varepsilon^2}{S(x)} (S(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (5.47)$$

ただし,

$$S(x) = \int_{\omega(x)} d\sigma$$

は断面 $\omega(x)$ の‘面積’である. $S(x)$ は周期関数で

$$\left\langle \frac{S'(x)}{S(x)} \right\rangle_A = 0$$

をみたすので, $b := S'/S$ とおくと (5.47) は (5.18) と同じ形になる. したがって, Theorem 5.2 の評価を利用すると, (5.46) のフロント波の伝播速度が一様環境下の伝播速度 c_b よりも遅くなることが示される.

Remark 5.5 $k > 0$ に対し,

$$u_t = (D(kx)u_x)_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (5.48)$$

の進行フロント波の平均速度を $s_b(k)$ とおく (進行フロント波が存在しない k に対しては, $s_b(k) = 0$ とする). このとき, 前節と本節の考察により,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_b(k)}{c_b} = \sqrt{\langle D \rangle_H} \quad (5.49)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{s_b(k)}{c_b} = \langle \sqrt{D} \rangle_H \quad (5.50)$$

を得る. $D(x)$ が定数関数でないとき,

$$\sqrt{\langle D \rangle_H} < \langle \sqrt{D} \rangle_H$$

が成り立つので, 環境の変化が非常に激しい場合よりも環境の変化が非常にゆっくりとしている場合の方が進行フロント波の平均伝播速度が速いということがわかる (確かに, 図 9 の右側のグラフでは, 左端の方が右端よりも値が大きくなっている).

6 おわりに

ここまで, 空間周期的環境を伝播する進行波に関する研究を一樣環境の場合の結果と対比させつつ紹介してきたが,

- 単安定型の場合, 進行波が平均速度を定めたとき一意か?
- 単安定型の進行波の (何らかの意味での) 安定性は?
- 双安定型の進行波の平均速度と環境変化の空間スケールとの関係は?
- 比較定理が成り立つ系 (2 種競争系, N 種競争系) が空間周期的な構造を持つ場合の進行波の存在, および平均速度は?
- 非周期的な環境変化 (概周期的, 再帰的, $\dots$, ランダム) な場合の進行波, およびその平均速度をどう定義するか?
- FitzHugh-Nagumo 方程式のように比較定理が成り立たない系の場合は?

というように, まだ分かっていないことが多い. このうち, 非周期的な環境変化の場合は, Matano [35, 36] により進行波の概念が拡張され, 平均速度が 0 の進行波の存在などのように空間周期的な環境では起こり得ない現象も報告されつつある ([34]).

非一樣環境を伝播する進行波の定性的性質を解明することは, 数理生態学, 電気生理学, 燃焼理論など自然科学のさまざまな分野に現れる重要な問題であるので, 今後さらに研究が発展して応用範囲が広がることが期待される.

参考文献

- [1] J. Alexander, R. Gardner and C. Jones, *A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves*, J. reine angew. Math., **410** (1990), 167–212.
- [2] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve propagation*, Lecture Notes in Math., **446**, Springer, Berlin, 1975, 5–49.
- [3] P. Bates and C. Jones, *Invariant manifolds for semilinear partial differential equations*, Dynamics Reported, **2** (1988), 1–38.
- [4] A. Benssousan, J.-L. Lions and G. Papanicoulau, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, 1978.
- [5] H. Berestycki and F. Hamel, *Front propagation in periodic excitable media*, Comm. Pure Appl. Math., **55** (2002), 949–1032.
- [6] H. Berestycki, F. Hamel and N. Nadirashvili, *The speed of propagation for KPP type problems, I. Periodic framework*, J. Eur. Math. Soc., **7** (2005), 173–213.
- [7] H. Berestycki, F. Hamel and L. Roque, *Analysis of the periodically fragmented environment model: II — biological invasions and pulsating travelling fronts*, J. Math. Pures Appl., **84** (2005), 1101–1146.

- [8] H. Berestycki and L. Nirenberg, *Traveling fronts in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **9** (1992), 497–572.
- [9] X. Chen, *Existence, uniqueness, and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Differential Equations, **2** (1997), 125–160.
- [10] C. Conley, *Isolated Invariant Set and the Morse Index*, Conf. Board Math. Sci., **38**, AMS, Providence, 1978.
- [11] D. Daners and P. Koch Medina, *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Pitman Research Notes in Mathematical Series, **279**, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.
- [12] S.-I. Ei and E. Yanagida, *Dynamics of interfaces in competition-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math., **54** (1994), 1355–1373.
- [13] P. C. Fife and J. B. McLeod, *The approach of solutions non-linear diffusion equations to traveling front solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal., **65** (1977), 335–362.
- [14] R. A. Fisher, *The advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics, **7** (1937), 355–369.
- [15] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964.
- [16] T. Gallay, *Local stability of critical fronts in nonlinear parabolic partial differential equations*, Nonlinearity, **7** (1994), 741–764.
- [17] B. H. Gilding and R. Kersner, *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 60. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [18] J. K. Hale and G. Raugel, *Reaction-diffusion equation on thin domains*, J. Math. Pures Appl. **71** (1992), 33–95.
- [19] S. Heinze, *Wave solutions to reaction-diffusion systems in perforated domains*, Z. Anal. Anwendungen, **20** (2001), 661–676.
- [20] S. Heinze, G. Papanicolaou and A. Stevens, *Variational principles for propagation speeds in inhomogeneous media*, SIAM J. Appl. Math., **62** (2001), 129–148.
- [21] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [22] U. Hornung (Ed.), *Homogenization and Porous Media*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 6, Springer-Verlag, 1996.
- [23] W. Hudson and B. Zinner, *Existence of traveling waves of reaction diffusion equation of Fisher type in periodic media*, “Boundary value problems for functional differential equations”, World Scientific, River Edge, N. J., 1995, 187–199.
- [24] V. V. Jikov, S. M. Kozlov and O. A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, 1994.
- [25] Ja. I. Kanel, *Stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations encountered in combustion theory*, Mat. Sb., **59** (1962), 245–288.
- [26] Y. Kan-on, *Parameter dependence of propagation speed of travelling waves for competition-diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal., **26** (1995), 340–363.
- [27] Y. Kan-on and E. Yanagida, *Existence of non-constant stable equilibria in competition-diffusion equations*, Hiroshima Math. J., **23** (1993), 193–221.
- [28] N. Kinezaki, K. Kawasaki, F. Takasu and N. Shigesada, *Modeling biological invasions into periodically fragmented environments*, Theor. Popul. Biol., **64** (2003), 291–302.
- [29] N. Kinezaki, K. Kawasaki and N. Shigesada, *Spatial dynamics of invasion in sinusoidally varying environments*, Popul. Ecol., **48** (2006), 263–270.
- [30] K. Kirchgässner, *On the nonlinear dynamics of traveling fronts*, J. Differential Equations, **96** (1992), 256–278.
- [31] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky and N. S. Piskunov, *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bulletin Université d'Etat à Moscou, Série internationale A **1** (1937), 1–26.
- [32] N. V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics Vol.12, Amer. Math. Soc., 1996.

- [33] J.-L. Lions, *Remarks on some asymptotic problems in composite materials and in perforated materials*, Variational Methods in Mechanics of Solids (Nemat-Nasser ed.), North-Holland, Pergman Press, 1979, 3–19.
- [34] B. Lou, H. Matano and K.-I. Nakamura, *Recurrent traveling waves in a two-dimensional saw-toothed cylinder and their homogenization limit*, preprint.
- [35] 俣野 博, 非一様な場における進行波とは何か?, 2002 年度日本数学会秋季総合分科会企画特別講演アブストラクト, 54–68.
- [36] H. Matano, *Traveling waves in spatially random media*, 研究集会「経済の数理解析」, 数理解析研究所講究録, **1337** (2003), 1–9.
- [37] H. Matano, K.-I. Nakamura and B. Lou, *Periodic traveling waves in a two-dimensional cylinder with saw-toothed boundary and their homogenization limit*, Netw. Heterog. Media, **1** (2006), 537–568.
- [38] K.-I. Nakamura, *Effective speed of travelling wavefronts in inhomogeneous media*, Proceedings of the Workshop “Nonlinear Partial Differential Equations and Related Topics”, Joint Research Center for Science and Technology of Ryukoku University, 53–60, 1999.
- [39] K.-I. Nakamura, *Bounds for effective speeds of traveling fronts in spatially periodic media*, 研究集会「反応拡散方程式系に現れる動的パターンの解析とその周辺」, 数理解析研究所講究録, **1330** (2003), 79–87.
- [40] 中村 健一, 均質化法の基本的なアイデアと不均質媒体中のフロント伝播への応用, 研究集会「第4回生物数学の理論とその応用」, 数理解析研究所講究録, **1597** (2008), 62–68.
- [41] K.-I. Nakamura, *Bounds for effective speeds of traveling fronts in spatially periodic media*, preprint.
- [42] K.-I. Nakamura, *Exponential stability of traveling waves in heterogeneous bistable media*, in preparation.
- [43] 新居 俊作, 進行波の線形安定性に対する位相的方法, 数学, **51** (1999), 241–256.
- [44] 西浦 廉政, 非線形問題 1 パターン形成の数理, 岩波講座「現代数学の展開」, 岩波書店, 1999.
- [45] T. Ogiwara and H. Matano, *Monotonicity and convergence results in order-preserving systems in the presence of symmetry*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **5** (1) (1999), 1–34.
- [46] T. Ogiwara and H. Matano, *Stability analysis in order-preserving systems in the presence of symmetry*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **129** (2) (1999), 395–438.
- [47] G. Papanicolaou and X. Xin, *Reaction-diffusion fronts in periodically layered media*, J. Statist. Phys., **63** (1991), 915–931.
- [48] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [49] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics **127**, Springer-Verlag, 1980.
- [50] D. Sattinger, *On the stability of travelling waves*, Adv. Math., **22** (1976), 312–355.
- [51] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*, Theor. Popul. Biol., **30** (1986), 143–160.
- [52] H. L. Smith and X.-Q. Zhao, *Global asymptotic stability of the traveling waves in delayed reaction-diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal., **31** (2000), 514–534.
- [53] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, 2nd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **258**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [54] J.-C. Tsai, *Global exponential stability of traveling waves in monotone bistable systems*, Disc. Conti. Dyn. Sys., **21** (2008), 601–623.
- [55] A. I. Volpert, Vi. A. Volpert and Vl. A. Volpert, *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Translations of Mathematical Monographs, **140**, AMS, 1994.
- [56] X. Xin, *Existence and uniqueness of traveling waves in a reaction-diffusion equation with combustion nonlinearity*, Indiana Univ. Math. J., **40** (1991), 985–1008.
- [57] X. Xin, *Existence and Stability of Traveling Waves in Periodic Media Governed by a Bistable Nonlinearity*, J. Dynam. Differential Equations, **3** (1991), 541–573.
- [58] X. Xin, *Existence of planar flame fronts in convective-diffusive periodic media*, Arch. Rational Mech. Anal., **121** (1992), 205–233.

- [59] J. X. Xin, *Existence and nonexistence of traveling waves and reaction-diffusion front propagation in periodic media*, J. Statist. Phys., **73** (1993), 893–926.
- [60] J. Xin, *Front Propagation in Heterogeneous Media*, SIAM Rev., **42** (2000), 161-230.
- [61] J. X. Xin and J. Zhu, *Quenching and propagation of bistable reaction-diffusion fronts in multidimensional periodic media*, Phys. D, **81** (1995), 94–110.
- [62] E. Yanagida, *Existence of stable stationary solutions of scalar reaction-diffusion equations in thin tubular domains*, Appl. Anal., **36** (1990), 171–188.

メモ

非線型シュレディンガー方程式の数学的基礎

平成 20 年 10 月

早稲田大学理工学術院
先進理工学部応用物理学科
小澤 徹

非線型シュレディンガー方程式についての函数空間論的な議論は [B, C, G, OPRTsTz, SS, Ta, Ts] を始め、多くの本で学ぶ事が出来る。特に [Ts] は日本語による貴重な本で入手も容易である。そこでは有限エネルギー解 (H^1 解) が主に扱われているので、ここでは有限チャージ解 (L^2 解) を取上げよう。

次の非線型偏微分方程式を考える：

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = f(u) \quad (\text{NLS})$$

ここで u は $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を独立変数とする複素数値函数、 $i = \sqrt{-1}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, f は次の仮定を満たすものとする。ここで $a \vee b = \max(a, b)$ とする。

$$(H1) \quad f \in C(\mathbb{C}; \mathbb{C}), \quad f(0) = 0$$

$$(H2) \quad f = f_1 + f_2, \quad f_j \in C(\mathbb{C}; \mathbb{C}), \\ C > 0, \quad 1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty \text{ が存在して任意の } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ に対し}$$

$$|f_j(z_1) - f_j(z_2)| \leq C(|z_1| \vee |z_2|)^{p_j-1} |z_1 - z_2|, \quad j = 1, 2$$

$$(H3) \quad (\text{符号条件}) \quad \text{Im}(\bar{z}f(z)) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

$f(z) = \lambda|z|^{p-1}z$, $\lambda \in \mathbb{R}$ は $f_1 = f$, $f_2 = 0$, $p_1 = p$ として上の条件を全て満たす。
(H3) はゲージ条件 $f(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}f(z)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ よりも弱い事に注意する。

初期データ $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を与えて次の積分方程式

$$u(t) = U(t)\phi - i \int_0^t U(t-t')f(u(t'))dt' \quad (\text{I})$$

を考える。ここで $U(t) = \exp(i\frac{t}{2}\Delta)$ は自由シュレディンガー発展群、即ち (NLS) の $f \equiv 0$ の場合の自由シュレディンガー方程式の解作用素である。(I) は (NLS) をデュ

アメルの原理に基づいて積分方程式にしたものである。具体的には $U(-t)u(t)$ を t について微分して (NLS) を用いて

$$\frac{d}{dt}(U(-t)u(t)) = U(-t)(\partial_t u - \frac{i}{2}\Delta u) = -iU(-t)f(u(t))$$

と計算したものを 0 から t 迄積分して、その結果得られる等式の両辺に $U(t)$ を施したものが (I) である。

積分方程式 (I) を解く基礎となるのが次の Strichartz 評価である。

命題 1 . $(n, q, r) \neq (2, 2, \infty)$ の場合を除いて $0 \leq 2/q = n/2 - n/r \leq 1$ を満たす二つの指数の任意の組 (q, r) に対し $C_r > 0$ が存在し次の評価を満たす：

$$\begin{aligned} \|U(\cdot)\phi; L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^n))\| &\leq C_r \|\phi; L^2(\mathbb{R}^n)\| \\ \|U * f; L^{q_1}(I; L^{r_1}(\mathbb{R}^n))\| &\leq C_{r_1} C_{r_2} \|f; L^{q'_2}(I; L^{r'_2}(\mathbb{R}^n))\| \\ \|U *_R f; L^{q_1}(I; L^{r_1}(\mathbb{R}^n))\| &\leq C_{r_1} C_{r_2} \|f; L^{q'_2}(I; L^{r'_2}(\mathbb{R}^n))\| \end{aligned}$$

ここで $I \subset \mathbb{R}$ は区間、 $U(\cdot)\phi : t \mapsto U(t)\phi$,

$$\begin{aligned} (U * f)(t) &= \int_I U(t-t')f(t')dt', \\ (U *_R f)(t) &= \int_{I \cap (-\infty, t]} U(t-t')f(t')dt' \end{aligned}$$

である。 (q_j, r_j) は $0 \leq 2/q_j = n/2 - n/r_j \leq 1$, $(n, q_j, r_j) \neq (2, 2, \infty)$ を満たす任意の組であり、 q' は q の共軛指数である。上の定数は I, ϕ, f に依存しない。

以下 (H2) は $1 = p_1 < p_2 = p$ として仮定する。 $T > 0$ に対し

$$\mathcal{X}_T = (C \cap L^\infty)(I; L^2) \cap L^q(I; L^{p+1}), \quad I = [0, T], \quad q = \frac{4(p+1)}{n(p-1)},$$

と置く。 q の定義により $0 \leq 2/q = n/2 - n/(p+1)$ が成立つ。ここで

$$0 \leq \frac{n}{2} - \frac{n}{p+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq p \leq 1 + \frac{4}{n}$$

なる関係に注意する。従って以下 $p \leq 1 + \frac{4}{n}$ を仮定して考える。 $\phi \in L^2$, $u \in \mathcal{X}_T$ に対し $\Phi(u)$ を

$$(\Phi(u))(t) = U(t)\phi - i \int_0^t U(t-t')f(u(t'))dt', \quad t \in I$$

で定める。簡単の為に $t \geq 0$ として考える。 $\Phi : u \mapsto \Phi(u)$ が $\mathcal{X}_T$ の或る閉球で縮小写像になっている事を示そう。

Strichartz 評価より

$$\begin{aligned} & \|\Phi(u); L^\infty(I; L^2) \cap L^q(I; L^{p+1})\| \\ & \leq C\|\phi; L^2\| + C\|f_1(u); L^1(I; L^2)\| + C\|f_2; L^{q'}(I; L^{(p+1)'})\| \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \|f_1(u); L^1(I; L^2)\| & \leq C\|u; L^1(I; L^2)\| \leq CT\|u; L^\infty(I; L^2)\|, \\ \|f_2(u); L^{q'}(I; L^{(p+1)'})\| & \leq C\|u^p; L^{q'}(I; L^{(p+1)'})\| \\ & = C\|\|u; L^{p+1}\|^p; L^{q'}(I)\| \\ & = C\|u; L^{pq'}(I; L^{p+1})\|^p \\ & \leq CT^{1-n(p-1)/4}\|u; L^q(I; L^{p+1})\|^p \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} & \|\Phi(u); L^\infty(I; L^2) \cap L^q(I; L^{p+1})\| \\ & \leq C\|\phi; L^2\| + CT\|u; L^\infty(I; L^2)\| + CT^{1-n(p-1)/4}\|u; L^q(I; L^{p+1})\|^p. \end{aligned}$$

同様に $u, v \in \mathcal{X}_T$ に対し

$$\begin{aligned} & \|\Phi(u) - \Phi(v); L^\infty(I; L^2) \cap L^q(I; L^{p+1})\| \\ & \leq CT\|u - v; L^\infty(I; L^2)\| \\ & \quad + CT^{1-n(p-1)/4}(\|u; L^q(I; L^{p+1})\| \vee \|v; L^q(I; L^{p+1})\|)^{p-1}\|u - v; L^q(I; L^{p+1})\| \end{aligned}$$

を得る。

そこで $R > 0$ に対して

$$\mathcal{X}_T(R) = \{u \in \mathcal{X}_T; \|u\| \equiv \|u; L^\infty(I; L^2) \cap L^q(I; L^{p+1})\| \leq R\}$$

と定めると以上の不等式より定数 C が存在し任意の $u, v \in \mathcal{X}_T(R)$ に対し

$$\|\Phi(u)\| \leq C\|\phi; L^2\| + CTR + CT^{1-n(p-1)/4}R^p \quad (1)$$

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq (CT + CT^{1-n(p-1)/4}R^{p-1})\|u - v\| \quad (2)$$

なる不等式が成立つ事が分かる。

定理 1 . (H1) 及び (H2) を $1 = p_1 < p_2 \equiv p < 1 + 4/n$ の下で仮定する。このとき任意の $\phi \in L^2$ に対して $T > 0$ が存在して (I) は $u \in \mathcal{X}_T$ なる一意解を持つ。 T は $\|\phi; L^2\|$ にのみ依存する。

(証明) $\theta = 1 - n(p-1)/4$ と置くと、仮定より $0 < \theta < 1$. 与えられた $\phi \in L^2$ に対し R, T を

$$\begin{aligned} C\|\phi; L^2\| & \leq R/2, \\ CT + CT^\theta R^{p-1} & \leq 1/2 \end{aligned}$$

と順に定めると (1),(2) により $\phi : u \mapsto \Phi(u)$ は $\mathcal{X}_T(R)$ 上の縮小写像となり不動点 $u \in \mathcal{X}_T(R)$ を唯一つ持つ。解の $\mathcal{X}_T$ に於ける一意性を示そう。 $u, v \in \mathcal{X}_T$ は共に (I) の解とする。方程式より

$$u(t) - v(t) = i \int_0^t U(t-t')(f(u(t')) - f(v(t'))))dt'$$

となるので Strichartz 評価より $0 < \tilde{T} \leq T$ なる $\tilde{T}$ に対し

$$\begin{aligned} & \|u - v; L^q(0, \tilde{T}; L^{p+1})\| \vee \|u - v; L^\infty(0, \tilde{T}; L^2)\| \\ & \leq C\tilde{T}\|u - v; L^\infty(0, \tilde{T}; L^2)\| \\ & + C\tilde{T}^\theta(\|u; L^q(0, \tilde{T}; L^{p+1})\| \vee \|v; L^q(0, \tilde{T}; L^{p+1})\|)^{p-1}\|u - v; L^q(0, \tilde{T}; L^{p+1})\| \end{aligned}$$

を得る。よって $\|u; L^q(0, T; L^{p+1})\| \vee \|v; L^q(0, T; L^{p+1})\| = M$ とおくと

$$C\tilde{T} + C\tilde{T}^\theta M^{p-1} < 1$$

なる $\tilde{T} > 0$ を t_0 とすれば $[0, t_0]$ 上 $u = v$ となる事が従う。特に $u(t_0) = v(t_0)$ であるので方程式により

$$u(t) - v(t) = i \int_{t_0}^t U(t-t')(f(u(t')) - f(v(t'))))dt'$$

となる。上と同じ議論により $[t_0, 2t_0]$ 上 $u = v$ となる事が従う。これを繰返して $[0, T]$ 上の一意性を得る。

次に臨界冪 $p = 1 + 4/n$ の場合を考える。

定理 2 . (H1) 及び (H2) を $1 < p_1 = p_2 \equiv p = 1 + 4/n$ の下で仮定する。このとき

- (1) 任意の $\phi \in L^2$ に対して $T > 0$ が存在して (I) は $u \in L^{2+4/n}(0, T; L^{2+4/n})$ なる一意解を持つ。この解は $u \in C([0, T]; L^2)$ を満たす。
- (2) $\varepsilon > 0$ が存在し $\|\phi; L^2\| \leq \varepsilon$ なる任意の $\phi \in L^2$ に対し (I) は $u \in L^{2+4/n}(\mathbb{R}; L^{2+4/n})$ なる一意解を持つ。この解は $u \in (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}; L^2)$ を満たす。更に $(\phi_+, \phi_-) \in L^2 \times L^2$ が存在して $t \rightarrow \pm\infty$ なるとき

$$\|U(-t)u(t) - \phi_\pm; L^2\| \rightarrow 0$$

を満たす。

(証明) 定理 1 の証明と同じ記号を用いる。 $u \in L^{2+4/n}(0, T; L^{2+4/n})$ に対し

$$\begin{aligned} \|\Phi(u); L^{2+4/n}(I; L^{2+4/n})\| & \leq C\|U(\cdot)\phi; L^{2+4/n}(I; L^{2+4/n})\| \\ & + C\|u; L^{2+4/n}(I; L^{2+4/n})\|^{1+4/n}, \\ \|\Phi(u) - \Phi(v); L^{2+4/n}(I; L^{2+4/n})\| & \leq C(\|u; L^{2+4/n}\| \vee \|v; L^{2+4/n}\|)^{4/n}\|u - v; L^{2+4/n}\| \end{aligned}$$

となる。Strichartz 評価により $U(\cdot)\phi \in L^{2+4/n}(I; L^{2+4/n})$ であり、そのノルムは T を充分小さくする事により任意に小さく取れる。よって $L^{2+4/n}(0, T; L^{2+4/n})$ の閉球の半径を充分小さく取る事により Φ はその上の縮小写像となる。以上により (I) が従う。(1) の解の存在は次の評価

$$\begin{aligned} \|\Phi(u); L^{2+4/n}(\mathbb{R}; L^{2+4/n})\| &\leq C\|\phi; L^2\| + C\|u; L^{2+4/n}\|^{1+4/n}, \\ \|\Phi(u) - \Phi(v); L^{2+4/n}(\mathbb{R}; L^{2+4/n})\| \\ &\leq C(\|u; L^{2+4/n}\| \vee \|v; L^{2+4/n}\|)^{4/n}\|u - v; L^{2+4/n}\| \end{aligned}$$

と (I) と同様の議論により従う。

定理 1 で得られた時間局所解を延長して大域解を得るには T は $\|\phi; L^2\|$ にのみ依存する事に着目すれば良い。

定理 3 . (H1), $1 \leq p_1 \leq p_2 < 1 + 4/n$ の下での (H2), 及び (H3) を仮定する。このとき (I) は $u \in C(\mathbb{R}; L^2)$ なる大域解をもち $u(t)$ の L^2 ノルムは保存する： $\|u(t); L^2\| = \|\phi; L^2\|$, $t \in \mathbb{R}$

(証明) 次の等式を用いれば良い：

$$\|u(t); L^2\|^2 = \|\phi; L^2\|^2 + 2 \operatorname{Im} \int_0^t (f(u(t')), u(t')) dt'$$

ここで $(\cdot, \cdot)$ は L^2 内積である：

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

参考文献

- [B] J. Bourgain, Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations, Amer. Math. Soc., 1999
- [C] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes 10, American Math. Soc., 2003.
- [G] J. Ginibre, Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires, Paris Onze Edition, L161. Université Paris-Sud, Paris, 1998.
- [OPRTsTz] T. Ozawa, F. Planchon, P. Raphaël, Y. Tsutsumi and N. Tzvetkov, Lectures on nonlinear dispersive equations, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications, **27**. Gakkōtoshō, 2006.

- [SS] C. Sulem and P.-L. Sulem, The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse, Applied Math. Sci. **139**. Springer, 1999.
- [Ta] T. Tao, Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis, CBMS Regional Conference Series in Mathematics. **106**. 2006.
- [Ts] 堤誉志雄, 偏微分方程式論-基礎から展開へ-, 数学レクチャーノート, 培風館, 2004.

メモ

パターン形成問題における定常解の構成 について

倉田 和浩（首都大学東京・理工学研究科）

数理生態学などにおけるパターン形成のしくみを理解する 1 つのアプローチとして、その現象を反応拡散方程式系を用いてモデル化し、その解析を通して現象の理解を進めるというものがあり、数学にも興味深い研究課題を提供し続けている。パターン形成問題は、非線形解析の方法論の格好の応用を提供し続けているとともに、新たにいくつかの大きな流れと重要な方法論がいくつも生み出されてきたと言えよう。

ここでは、話題を絞って、パターン形成問題の中でも、森本光太郎氏（首都大・理工）との最近の共同研究で行った飽和効果の入った Gierer-Meinhardt 系や Chemotaxis 系の定常解の 1 つの構成法を中心に、関連した話題も交えて紹介したい。ここで紹介する特徴的なことは、抑制因子の拡散係数 $D \rightarrow +\infty$ の極限問題としてのシャドウ系等に現れる非局所項を含んだ非線形楕円型境界値問題の（スパイク状の形状を持つ）解をいかに構成するかという問題でもあり、特殊ではあるがある状況のもとで有効に働く 1 つの方法論を提供することが主眼となる。従って、さまざまなパターン形成問題の定常解の存在問題・構成問題に関しての総括的な解説というより、特殊な方法論の紹介であることを最初に断りしておきたい。関連した話題、他の解法等やより包括的な解説については、例えば [三村], [西浦], [高木], [Ni], [WW2], [永井], [Suzuki]などを参照していただきたい。

1 考える問題と方針

1.1 Gierer-Meinhardt 系と Chemotaxis 系

まず, 形態形成の 1 つのモデルとして有名な Gierer-Meinhardt 系 (以下, GM 系と呼ぶ) とは次の方程式系である:

$$\begin{aligned} A_t &= \epsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^p}{H^q(1+\kappa A^p)}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \tau H_t &= D \Delta H - H + \frac{A^r}{H^s}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} &= \frac{\partial H}{\partial \nu} = 0, \quad (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T) \\ A(x, 0) &= A_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x). \end{aligned}$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ の滑らかな有界領域で, ν は $\partial \Omega$ の外向き単位法ベクトル, $p, q, r > 0, s \geq 0$ で

$$0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}$$

を満たすものとする. この条件の下で, 任意の $\kappa \geq 0$ に対して, GM 系は (A^*, H^*) , $A^*, H^* > 0$ なるただ 1 つの定数解をもつ. 2 つの化学物質の活性-抑制相互作用を記述するモデルで, A が活性因子の濃度を, H は抑制因子の濃度を表す. $\tau, \kappa \geq 0$ で, 特に $\kappa > 0$ のときは飽和効果を考慮したモデルとなっている. 典型的な例は, $(p, q, r, s) = (2, 1, 2, 0)$ である. ϵ^2, D はそれぞれ A および H の拡散係数を表すが, ϵ は十分小さく, D が十分大きい状況を考える. 定数解 (A^*, H^*) は常微分方程式の平衡点としては安定であるが, 拡散効果が入ってしかも十分小さい ϵ と十分大きい D に対しては, (A^*, H^*) は不安定化し ([高木] 参照), 空間非一様な定常解で安定な解の存在が期待される.

GM 系の定常解が満たす方程式は次となる:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^p}{H^q(1+\kappa A^p)}, \quad x \in \Omega, \\ 0 &= D \Delta H - H + \frac{A^r}{H^s}, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} &= \frac{\partial H}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{aligned}$$

ここでまず, $D \rightarrow +\infty$ での極限問題として現れる次の系 (シャドウ系と呼ばれる) を考える:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^p}{\xi^q(1+\kappa A^p)}, \quad x \in \Omega, \\ 0 &= -\xi |\Omega| + \frac{1}{\xi^s} \int_{\Omega} A^r dx, \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{aligned}$$

これは, さらに, $A(x) = \xi u(x)$ として,

$$0 = \epsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^p}{\xi^{q-(p-1)}(1 + \kappa \xi^p u^p)},$$

$$\xi^{r-(s+1)} = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^r dx \right)^{-1}$$

となる. ここで, 次の仮定をする:

$$0 < p - 1 = q.$$

従って, このとき最初の仮定から, $r > s + 1$ となる. この仮定の下で, 上記は次の問題となる:

$$0 = \epsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^p}{1 + \kappa \xi^p u^p},$$

$$\xi^{r-(s+1)} = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^r dx \right)^{-1}$$

なる $(u(x), \xi)$ を見つけること. さらに, $\delta = \kappa \xi^p$ とおくと, 問題は

$$0 = \epsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^p}{1 + \delta u^p}, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\kappa = \delta \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^r dx \right)^{\frac{p}{r-(s+1)}}$$

なる $(u(x), \delta)$ を見つけることに帰着されることとなる.

Remark 1 $\kappa = 0$ (飽和効果がなし) の場合には, $p - 1 \neq q$ の場合でも, $v = \xi^\alpha u$, $\alpha = 1 - \frac{q}{p-1}$ によって,

$$0 = \epsilon^2 \Delta v - v + v^p, \quad \xi^{\frac{rq}{p-1}-(s+1)} = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v^r dx \right)^{-1}$$

となって, 系が分離されることとなってスカラー方程式の解の存在問題に完全に帰着されることとなる. 仮定から, $\frac{rq}{p-1} - (s+1) > 0$ であることに注意しよう. *Ni-Takagi*[NT1, 2], *Gui-Wei* らの一連の研究によって, この $\kappa = 0$ の場合, $\partial\Omega$ 上の多重ピーク解の存在, Ω 内部の多重ピーク解の存在などが知られている. いずれもピークの配置は, 境界上の多重ピーク解の場合は $\partial\Omega$ 上の平均曲率関数の非退化臨界点, 内部多重ピーク解の場合は, お互いのピーク間距離と境界からの距離のバランスが取れた配置 (球充填配置) 等の配置を取る.

$(p, q, r, s) = (2, 1, 2, 0)$ なる典型的な場合で, $\kappa > 0$ で $\kappa \sim \epsilon^{2N}, \epsilon \rightarrow 0$, なる弱い飽和効果の場合には, [WW1] によって一般領域上で 1 つのピークを持つ解の構成が, [KuMo1] によって軸対称領域上で多重ピーク解の構成がなされた. よりつよい飽和効果のある場合の研究はさらに少なく, Ω が球で $k > 0$ が固定されたときの球状の内部遷移層をもった解の構成やストライプ状の解の数値シミュレーションなどが [KSWW] でなされているだけである. 大雑把に言って, 飽和効果の強さを表す κ をパラメータとして大きくしていくに従って, 安定な解としてはピーク状の解からストライプ状の解、さらには内部遷移層を持つ解へと変化していくことが期待される. もちろん, 不安定な解も含めた解全体の構造が κ によってどう変化するのか興味深い.

よく似た解構造をもつ系として, 次の飽和効果が入った chemotaxis 系 (の定常問題) をあげる:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^2 \Delta W - W + \frac{P}{1+\kappa P}, \quad x \in \Omega, \\ 0 &= D \nabla \cdot (\nabla P - P \nabla \phi(W)), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial W}{\partial \nu} &= \frac{\partial P}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial \Omega, \end{aligned}$$

$\phi(W) = q \log W, q > 1$. この問題では, 発展問題の観点から, $P(x, t)$ に対して $\int_{\Omega} P(x, t) dx$ が保存されるため, 例えば, $\int_{\Omega} P(x) dx = 1$ としてよい. また, 最初の式から $P(x)/W(x)^q$ が定数となるので,

$$P(x) = \frac{W(x)^q}{\int_{\Omega} W(x)^q dx}$$

となる. これより,

$$0 = \epsilon^2 \Delta W - W + \frac{W^q}{\int_{\Omega} W^q dx + \kappa \int_{\Omega} W^q dx}$$

という非局所項を含む非線形楕円型境界値問題に帰着された. これは

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{\Omega} W^q dx, \\ \epsilon^2 \Delta W - W + \frac{W^q}{\delta + \kappa W^q} &= 0 \end{aligned}$$

なる $(W(x), \delta)$ のペアを見つけることと同値である. これはさらに, $W(x) = \delta^{\frac{1}{q-1}} \hat{W}(x), \hat{\delta} = \kappa \delta^{\frac{1}{q-1}}$ とおくことによって

$$\hat{\delta} \int_{\Omega} \hat{W}^q dx = \kappa,$$

$$\epsilon^2 \Delta \hat{W} - \hat{W} + \frac{\hat{W}^q}{1 + \delta \hat{W}^q} = 0$$

なる $(\hat{W}, \delta)$ を見つけることに帰着され, これは飽和効果のある GM 系のシャドウ系とほぼ同じ方程式系となる. この場合は, $\kappa \sim \epsilon^N$ の状況で, 多重ピーク解の存在を示すことができる ([KuMo2]).

同じ chemotaxis 系で, 次の相互作用を持つ場合の研究がある:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^2 \Delta W - W + \frac{PW}{\alpha + \gamma W}, \quad x \in \Omega, \\ 0 &= D \nabla \cdot (\nabla P - P \nabla \phi(W)), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial W}{\partial \nu} &= \frac{\partial P}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial \Omega, \end{aligned}$$

$\phi(W) = q \log W, q > 1$. この場合,

$$0 = \epsilon^2 \Delta W - W + \frac{W^{q+1}}{\int_{\Omega} W^q dx (\alpha + \gamma W(x))}$$

という非局所項を含む非線形楕円型境界値問題に帰着され, 少し違うが同様の解析が可能となり, 多重ピーク解の存在を示すことができる ([KuMo2] 参照). これに関しては, [SWW] でも既に解析がされており, 1 つのピークをもつ解の構成と安定性が議論されている.

1.2 シャドウ系の解の構成の方針

GM 系のシャドウ系を例にとり, その解の構成の方針の概略を紹介しよう. まず, 適当な範囲に $\delta > 0$ を固定して, スカラーの楕円型境界値問題:

$$0 = \epsilon \Delta u - u + f_{\delta}(u), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial \Omega,$$

ここで,

$$f_{\delta}(u) = \frac{u^p}{1 + \delta u^p},$$

の多重ピーク解を構成したい. そうしてその解を $u = u_{\delta, \epsilon}(x)$ と書き, もう 1 つの条件である

$$\kappa = \delta \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_{\delta, \epsilon}^r dx \right)^{\frac{p}{r - (s+1)}}$$

が成り立つような δ が存在することを示すのが全体の方針である.

スカラー方程式のピーク状プロファイルをもつ解 u_ϵ の構成法はいくつか知られているが、いま仮に $u(x) = u_\epsilon(x)$ がそうした解だとして、 $u(x)$ の最大点を P_ϵ とし、 $v_\epsilon(y) = u(P_\epsilon + \epsilon y)$ とおく。このとき、 $v(y) = v_\epsilon(y)$ は

$$0 = \Delta v - v + f_\delta(v), \quad y \in \frac{1}{\epsilon}(\Omega - P_\epsilon)$$

を満たす。ここで少し発見的考察を行うことにしよう。もし仮に、 $v_\epsilon(y) \rightarrow w(y)$ in C_{loc}^1 とし、 $P_\epsilon \in \Omega$ で $d(P_\epsilon, \partial\Omega)/\epsilon \rightarrow +\infty$ ならば、

$$0 = \Delta w - w + f_\delta(w), \quad y \in \mathbf{R}^N$$

を満たすこととなる。

$P_\epsilon \in \partial\Omega$ の場合、適当な座標変換によって

$$0 = \Delta w - w + f_\delta(w), \quad y \in \mathbf{R}_+^N = \{y \in \mathbf{R}^N : y_N > 0\},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y_N} = 0, \quad y \in \partial\mathbf{R}_+^N$$

を満たすこととなる。2 番目の場合でも $y_N < 0$ に偶関数として拡張することで極限関数 $w(y)$ は上の全空間における解となる。このことは、言い換えれば、 $\epsilon \rightarrow 0$ において

$$u_\epsilon(x) \sim w\left(\frac{x - P_\epsilon}{\epsilon}\right)$$

なる漸近挙動を示唆している。またこのとき、 $u_\epsilon(x)$ は、極限プロファイル $w(y)$ を持ちながら点 P_ϵ に凝縮し、ピーク状の形状をもった解であることを表している。

逆に、このような漸近挙動をするピーク状の解を構成したいのであるが、その際、まずはこの極限問題の構造を解析する必要がある。特に、極限問題の解は（平行移動を除いて）一意に存在し、かつ非退化性を持つことが重要となる。もちろん、これ自体が非線形性 $f_\delta(t)$ に強くよっており、与えられた非線形項 $f_\delta(t)$ がそういう性質を持つかどうかを調べる必要がある。

次に、極限問題の解を用いて適切な近似解を作って、その近くに真の解を見つめるという手順を取る。この際に、単に各 δ ごとに上のスカラー方程式の解 $u_{\delta,\epsilon}(x)$ を得るだけでは、一般に δ に関して解 $u_{\delta,\epsilon}(x)$ が連続性も持つかどうか不明である。Wei-Winter[WW1] では、1-ピーク解の構成を Lyapunov-Schmidt 法により有限次元問題への帰着し、解を捕まえている

が, δ に関する連続性を保証するためには, そうした 1-ピーク解の一意性を調べたりしなければならず, 多重ピーク解の構成などには困難であると思われる. そこで, [KuMo1] で取った方法としては, 領域 Ω に x_N 軸対称性を仮定することによって, さらにパラメータ連続依存性をもった縮小写像の原理によって解 (しかもパラメータ δ に関して連続性を持つ解) の構成を行うという着想を用いる. 軸対称性を仮定したことによって, 近似解 $U_{\delta,\epsilon}$ の線形化作用素が軸対称な関数空間上で可逆などのよい性質を持つことがキーポイントとなり, 解析をやさしくしてくれる. こうした領域の軸対称性の利用は [NT3] で既に $\kappa = 0$ の飽和効果がない場合にされていた. また, 各 δ ごとに 1 ピーク解を変分法 (特に Mountain Pass Theorem) を用いて捕まえることもできる ([田中] 参照). しかしながら, 得られた解 u_δ が δ に関して連続性を持つかどうかは不明である (cf. [SWW]).

シャドウ系の解の存在を示すには, まず $\int_\Omega u_{\delta,\epsilon}^r dx$ の $\epsilon \rightarrow 0$ での漸近挙動が, m 個のピークを持つような解の場合は,

$$\int_\Omega u_{\delta,\epsilon}^r dx \sim \epsilon^N \frac{m}{2} \int_{\mathbf{R}^N} w_\delta^r dx$$

となることを調べることで, また極限問題の解 w_δ に対して

$$\beta(\delta) = \delta \left(\int_{\mathbf{R}^N} w_\delta^r dx \right)^{\frac{p}{r-(s+1)}}$$

の δ -依存性を調べることにより証明される.

Remark 2 一般に, 当然ながら, 問題によって調べるべき関数 $\beta(\delta)$ は異なる.

さて, GM 系のシャドウ系の多重ピーク状の定常解の存在定理を述べよう.

(A0) $0 < p - 1 = q, \quad r > s + 1, \quad s \geq 0.$

(A1) $N \geq 2$ の場合, Ω は $\mathbf{R}^N$ の滑らかな有界領域で x_N 軸対称であるとする.

(A2) 極限問題:

$$\Delta w - w + \frac{w^p}{1 + \delta w^p} = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

$$w(0) = \max w, \quad w(x) \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow +\infty$$

がただ 1 つの解をもち非退化性を持つ (2 節を参照).

(A3) ある定数 $k_0 \in [0, +\infty)$ が存在して、次が成り立つ:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\epsilon^{-N} |\Omega|)^{\frac{p}{r-(s+1)}} \kappa = k_0.$$

(A4) $k_0 = 0$ の場合は, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, $k_0 > 0$ の場合は $1 \leq N < +\infty$.

Theorem 1 (A0) – (A4) を仮定する. $P = \{P_j\}_{j=1}^m$ を x_N 軸と $\partial\Omega$ との交点のうち任意にとりだしたものとする. このとき, (A3) で与えられた各 $k_0 \in [0, +\infty)$ に対して, 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して GM 系のシャドウ系の定常解 $(A_\epsilon, \xi_\epsilon)$ で $A_\epsilon(x)$ が P に凝集するような多重ピーク状プロファイルを持つものが存在する.

Remark 3 $p = 2, 3$ の場合に上の仮定はすべて満たされることがわかる. $(p, q, r, s) = (2, 1, 2, 0)$ の場合の結果は [KuMo1] の結果である (cf. [WW1], [NT3]). さらに十分大きな $D > 0$ に対して, このシャドウ系の解の近くに GM 系の解の存在が陰関数定理によって言える (より詳しい主張については [KuMo1] を参照.) 飽和効果をもった Chemotaxis 系についても同様の結果を得ることができる ([KuMO2]).

以下に, この定理を証明する手順の概略について紹介する.

2 極限問題の解析

非線形項 $f_\delta(t)$ に対して, $\mathbf{R}^N$ での正値解 $u(x)$ で $u(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow +\infty$ なる解の存在, 一意性, 非退化性の成り立つ条件がいくつか知られている. 存在条件については, ほぼ最適条件が知られている ([BL], [BGK] 参照) が, 一意性および非退化性は微妙な問題で, それらを保証する条件はある程度よい十分条件は知られているものの, 最適な条件かどうかは不明である.

ここでは, 知られている条件を紹介し ([BS] 参照), どういう非線形性であればそれらの条件が確かめられるかを検証する.

非線形項 $g(t)$ が満たすべき条件を挙げる. $g \in C^1([0, +\infty))$ であって, $g(t) \neq 0$ である限り, 関数

$$K(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)}, \quad t \geq 0$$

を定義する. 次の仮定をする.

(g1) 次を満たす $b > 0$ が存在する: $g(0) = g(b) = 0, g(u) < 0$ for $u \in (0, b)$, $g'(0) < 0$ かつ $g'(b) > 0$;

(g2) 次を満たす $\theta > b$ が存在する: $g(t) > 0$ for $t \in (b, \theta]$ かつ $\int_0^\theta g(t) dt = 0$;

さらに, 次の (g3B), (g4B) を満たすとき, $g(t)$ はクラス (B) であるという:

(g3B) ある $c > \theta$ があって, $g(t) > 0$ for $t \in (b, c)$ かつ $g(t) < 0$ for $t > c$;

(g4B) $\rho \in [b, c)$ で $(t - \rho)g'(t) \leq g(t)$ が $t \in (\rho, c)$ で成り立つような最小の数とする. $\rho \leq \theta$ であるか, または $\rho > \theta$ であって, 次が成り立つものとする: $K(t) \geq K(\rho)$ for $t \in (b, \theta]$; $K(t)$ は区間 $[\theta, \rho]$ 上で非増加関数; $K(t) \leq K(\rho)$ for $t \in (0, b) \cup [\rho, c)$.

Proposition 1 $g(t)$ はクラス (B) であるとする. このとき,

$$\Delta w + g(w) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

$$w(0) = \max w, w(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow +\infty)$$

はただ 1 つの解 $w(x)$ を持ち, 次が成り立つ:

(1) $w \in C^2 \cap H^2(\mathbf{R}^N)$;

(2) $w(x) = w(|x|)$ で $w'(r) < 0, r > 0$;

(3) ある定数 $C, C' > 0$ が存在して

$$|D^\alpha w(x)| \leq C e^{-C'|x|}, \quad |\alpha| \leq 2;$$

(4) (線形化作用素の非退化性) 線形化作用素 $L = \Delta + g'(w): H^2(\mathbf{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^N)$ の最大固有値 $\lambda_1(L) > 0$ で, 単純であって, 対応する固有関数は球対称な正值関数である. さらに, $\lambda_2(L) = 0$ であって, $\text{Ker}(L)$ は $\{\partial w / \partial x_j\}_{j=1}^N$ で張られる. さらに L は球対称な空間 $H_r^2(\mathbf{R}^N)$ に制限すると $L_r^2(\mathbf{R}^N)$ への *bijective* となる.

解の存在については, $N = 1$ および $N \geq 3$ については [BL] を, $N = 2$ の場合には [BGK] を参照されたい. $N = 1$ の場合には, 常微分方程式の議論による [BL] に一意性を含めた証明がある. この場合, 非退化性の証明は, 1 次元固有関数とその零点の個数で特徴づけられることより, 比較的容易にできることとなる. $N \geq 2$ のときの解の存在は, 制限つき変分法の手法で証明される. $N \geq 2$ の場合の解の一意性や非退化性の証明等については, [BDS], [BS], [OS]などを参照されたい.

$N = 1$ の場合の結果と証明は易しいので, その主張とともに紹介しよう ([BL]).

Proposition 2 $f(0) = 0, f'(0) < 0$ であって,

$$0 < \zeta_0 = \inf\{\zeta > 0 : F(\zeta) = 0\}, f(\zeta_0) > 0$$

を満たすとする. ここで $F(t) = \int_0^t f(s) ds$. $N = 1$ とし,

$$0 = u''(x) + f(u), u(x) > 0, x \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0$$

の解が上の条件の下でただ 1 つ存在し, $u(x) = u(|x|), u'(r) < 0$ ($r > 0$) を満たす. また非退化性も成立する.

Proof. 存在: 常微分方程式の初期値問題:

$$-u''(r) = f(u(r)), u(0) = \zeta_0, u'(0) = 0$$

の解の最大存在区間を $(-T, T)$ とする. このとき, 常微分方程式の初期値問題の一意性から $u(x) = u(-x)$ がわかることに注意. また

$$-\frac{u'(r)^2}{2} = F(u(r))$$

が成り立つことから, $u(x) > 0, x \in (-T, T)$ がわかる. また $u''(0) = -f(u(0)) = -f(\zeta_0) < 0$ より 0 の近くで $u'(r) < 0$ となるが, どこかで $u'(x_0) = 0$ となるとしたら, $F(u(x_0)) = 0, 0 < u(x_0) < \zeta_0$ となって ζ_0 の定義に反することとなる. 従って $u'(r) < 0$ ($0 < x < T$) となり, よって $0 < u(x) < \zeta_0$ ($x \in (-T, T)$) となる. これより, $T = +\infty$ がわかる. また, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = L$ とおくと, $0 \leq L < \zeta_0$ であるが, $L > 0$ と仮定すると $F(L) = 0$ となることと ζ_0 の定義に矛盾. よって

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0.$$

これより解の存在が得られた.

一意性を示そう. $v(x)$ を別の解として, 平行移動することにより, $v(x)$ は $x = 0$ で最大値を取るとしてよい.

$$-\frac{v'(x)^2}{2} = F(v(x)) - F(v(0))$$

となるが, $v'(x)^2 \rightarrow 0$ $x \rightarrow +\infty$ から $F(v(0)) = 0$ を得る. よって

$$-\frac{v'(x)^2}{2} = F(v(x)).$$

もし $v(0) > \zeta_0$ とすると, ある $x_0 > 0$ があって $v(x) > \zeta_0$, $x \in (0, x_0)$ かつ $v(x_0) = \zeta_0$ となる. このとき, 上の関係式と $F(\zeta_0) = 0$ から $v'(x_0) = 0$ となる. しかし $-v''(x_0) = f(v(x_0)) = f(\zeta_0) > 0$ となるが, これは x_0 の定義に矛盾する. $v(0) < \zeta_0 = u(0)$ なら, $x = 0$ で $v'(0) = 0$ より $0 = F(v(0))$ となるが, ζ_0 の定義に反する. よって $v(0) = u(0)$ となって解の一意性がいえた. 最後に非退化性であるが, $\phi(x) = u'(x)$ とおくと $-\phi = f'(u)\phi$ を満たし, $u(x)$ の性質から $\phi(x)$ は $x = 0$ にのみ零点をもつ関数で 0 の固有関数となっている. スツルム理論 (と同様の考察から) 0 の固有関数は $\phi(x)$ だけで張られ (なぜなら, もう 1 つ別の 0-固有関数 $v(x)$ があるとして, お互いの方程式にそれぞれ $v(x), u(x)$ をかけて $(0 < +\infty)$ で積分することで, $v(0) = 0$ となる. 適当な定数で $v'(0) = Cu'(0)$ となるものを取ることで, $v(x) \equiv Cu(x)$ が結論されることとなる), $\phi(x)$ は第 2 固有関数となることがわかる. $\square$

また, 同じ結果は $g(t)$ がクラス (A) の非線形項の場合でも成り立つことが知られている. ([KZ], [BS]などを参照.) ここで $g(t)$ がクラス (A) であるとは, $(g1), (g2)$ を満たし, さらに次を満たすことをいう:

(g3A) $g(t) > 0$ for $t > b$;

(g4A) $K(t)$ は $[\theta, +\infty)$ 上で非増加であって, ある $K_\infty \in [1, \frac{N+2}{N-2})$ が存在して, $K(t) \rightarrow K_\infty$ $t \rightarrow +\infty$;

(g5A) $K(t) \geq K(\theta)$ for $t \in (b, \theta]$ であって, $K(t) \leq K_\infty$ for $t \in (0, b)$.

(g6A) ある $0 \leq l < \frac{N+2}{N-2}$ があって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^l} = 0.$$

Example 1 飽和効果のある GM 系に現れる極限方程式は

$$\Delta w - w + \frac{w^p}{1 + \delta w^p} = 0$$

となるが,

$$w(x) = \delta^\beta v(\delta^\gamma x), \quad \beta = -\frac{1}{p}, \quad \gamma = -\frac{1+\beta}{2} = \frac{-1+\frac{1}{p}}{2}$$

とおくと,

$$g_\delta(t) := -\delta^\eta t + \frac{t^p}{1 + t^p}, \quad \eta = 1 - \frac{1}{p} > 0$$

として

$$\Delta v + g_\delta(v) = 0$$

と変形されることがわかる. この形で非退化性等の条件を確かめてもよい. このとき, $p = 2$ または $p = 3$ のとき, このある $\delta_* > 0$ が存在して, 任意の $0 < \delta < \delta_*$ に対して, $g_\delta(t)$ はクラス (B) であることが確かめられる ($p = 2$ の場合は [WW1], $p = 3$ の場合は [KuMo2]). 一般の $p > 1$ に対してもクラス (B) であるかどうかは不明. さらにこの δ_* はちょうど

$$G_{\delta_*}(c(\delta_*)) := \int_0^{c(\delta_*)} g_{\delta_*}(t) dt = 0$$

なる条件で特徴付けされる. ここで $0 < b(\delta) < c(\delta)$ で, $b(\delta), c(\delta)$ は $g_\delta(t) = 0$ の 2 つの正の根を表している.

Proof for the case $p = 2$: $p = 2$ の場合は, [WW1] に証明があるが, ここでは少しより簡単と思われる $K'(t)$ の関する計算を与えてみたい. まず

$$K(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{(tg(t))' - g(t)}{g(t)} = \frac{(tg(t))'}{g(t)} - 1$$

に注意する. この場合,

$$g(t) = g_\delta(t) = -\sqrt{\delta}t + \frac{t^2}{1+t^2}$$

であって, $\delta < \frac{1}{4}$ のときに, $g_\delta(t) = 0$ は正の 2 根 $0 < b = b(\delta) < c = c(\delta)$ を持つことがわかる. さらにある $\delta_* < \frac{1}{4}$ が存在して, $0 < \delta < \delta_*$ なる δ に対して, $(g1), (g2), (g3B)$ が成り立つことが容易にわかる. 最後に条件 $(g4B)$ を確かめるのに, $K'(t)$ の計算を行う. このとき,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{t}{1+t^2}(-\sqrt{\delta}(1+t^2) + t) = -\sqrt{\delta}\frac{t}{1+t^2}(t^2 + 1 - \frac{t}{\sqrt{\delta}}) \\ &= -\sqrt{\delta}\frac{h(t)}{t}(t-b)(t-c), \quad h(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

と書ける. よって, $tg(t) = -\sqrt{\delta}h(t)(t-b)(t-c)$ であり,

$$(tg(t))' = -\sqrt{\delta}\left(h(t)\{(t-b) + (t-c)\} + h'(t)(t-b)(t-c)\right).$$

したがって,

$$\frac{(tg(t))'}{g(t)} = t\left\{\frac{1}{t-b} + \frac{1}{t-c}\right\} + \frac{h'(t)}{\left(\frac{h(t)}{t}\right)} = 2 + \frac{b}{t-b} + \frac{c}{t-c} + t\frac{h'(t)}{h(t)}$$

と書ける. ここで $\log h(t) = 2 \log t - \log(1 + t^2)$ なので

$$t \frac{h'(t)}{h(t)} = t(\log h(t))' = t \left\{ \frac{2}{t} - \frac{2t}{1+t^2} \right\} = 2 \left(1 - \frac{t^2}{1+t^2} \right) = \frac{2}{1+t^2}$$

となり,

$$K'(t) = -\frac{b}{(t-b)^2} - \frac{c}{(t-c)^2} - \frac{4t}{(1+t^2)^2} < 0, \quad t > 0, t \neq b, c$$

を得る. つまり $K(t)$ が常に非増加関数であることがわかる. したがってまた $K(t) \leq K(0) = 1$, $t \in (0, b)$ であり, さらに別途 $1 \leq K(\rho)$ なることをチェックすれば (省略するが, 実際チェックできて), (g_4B) も成り立つことがわかる.

$p = 3$ の場合の証明も少し複雑になるが基本的には同様の考察によって, $K(t)$ が $t \in (b, +\infty)$ で非増加関数になること, $K(t) \leq K(0) = 1$, $t \in (0, b)$ であって, $1 \leq K(\rho)$ となることがチェックできて, (g_4B) の条件が成り立つことがわかる ([KuMo2]). $\square$

Example 2 GM 系で飽和効果がない場合は, $\delta = 0$ に対応し, このときの $g(t) = -t + t^p$ は $1 < p < (N+2)/(N-2)$ の条件のもとで, クラス (A) であることがわかる.

Proof. この場合 $b = 1$, ある $\theta > 1$ があって, $(g_1), (g_2), (g_3A)$ が成立. $g'(t) = -1 + pt^{p-1}$ なので,

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{-t + pt^p}{-t + t^p} = \frac{-1 + pt^{p-1}}{-1 + t^{p-1}} \\ &= p + \frac{p-1}{-1 + t^{p-1}} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$K'(t) = -(p-1)^2 \frac{t^{p-2}}{(-1 + t^{p-1})^2} < 0, \quad t > 0, t \neq 1.$$

したがって, 常に非増加関数である. よって, $K_\infty = p$ として, (g_4A) も成立. また (g_6A) も成立. (g_5A) の最初の条件, $K(t) \geq K(\theta)$, $t \in (1, \theta]$ は非増加関数なので成立. 最後に $t \in [0, 1)$ 上で非増加なので $K(t) \leq K(0) = 1$ であって $1 < p = K_\infty$ なので $K(t) \leq K_\infty$, $t \in [0, 1)$ も成立するので, クラス (A) であることが確かめられた. $\square$

Example 3 他に飽和効果のある *chemotaxis* 系の極限問題に関連して現れる

$$g_\delta(t) := -t + \frac{t^{p+q}}{\delta + t^q}, \quad p > 1, q > 0, \delta > 0$$

などもクラス (A) の非線形項と結びつけることで, 解の一意存在や非退化性がわかる ([KuMo2]).

3 近似解の構成とその線形化作用素

以下, $\Delta - 1 + f'_\delta(w_\delta)$ が非退化性をもつ状況を仮定して話を進めることにする. (例えば, 少なくとも GM 系のシャドウ系において, 対応する $f_\delta(t) = \frac{t^p}{1+\delta t^p}, p > 1$ で, $p = 2, 3$ の場合などは, 非退化性条件を満たすことが確かめられる. 一般の $p > 1$ の場合でも非退化性条件が成立するかどうかは, 現在のところ不明である.)

自然な近似解 $U_{\delta,\epsilon}(x)$ の構成をし, その線形化作用素

$$L_{\delta,\epsilon} := \Delta - 1 + f'_\delta(U_{\delta,\epsilon})$$

を軸対称な空間 ($1 \leq t \leq +\infty$ として)

$$X_\nu^{2,t} = \{v \in W^{2,t}(\Omega) : u(x', x_n) = u(|x'|, x_N), \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

$$X^t = \{v \in L^t(\Omega) : u(x', x_N) = u(|x'|, x_N)\}$$

で考える. $P := \{P_j\}_{j=1}^m$ を x_N -軸と $\partial\Omega$ の交わる点の集合から任意にとる. $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ を $0 \leq \chi(t) \leq 1$ ($t \in \mathbf{R}$); $\chi(t) = 1$ ($|t| \leq 1$); $\chi(t) = 0$ ($|t| \geq 2$) なる関数とする. 近似解として

$$U_{\delta,\epsilon}(x) := \sum_{j=1}^m \chi\left(\frac{1}{\kappa}|\Psi(x; P_j)|\right) w_\delta\left(\frac{1}{\epsilon}\Psi(x; P_j)\right)$$

とおく. 各 P_j の近傍と y 空間で原点を中心とし半径 3κ の球を含む領域との微分同相 $x = \Phi(y; P_j)$ (その逆写像を $y = \Psi(x; P_j)$ とする) で, $\partial\Omega$ と $y_N = 0$ が対応し, $\partial\Omega$ 方向が y_N 方向と一致し, さらに x_N 軸対称な関数 $u(x)$ に対して, $v(y) = u(\Psi(y; P_j))$ が y_N 軸対称となるようなものを取る ([NT1]).

$L_{\delta,\epsilon}$ が $X^{2,t}$ から X^t へ bijective であることを示す次の Lemma が重要となる.

Lemma 1 $1 < t < +\infty$ とする. $0 < \delta_1 < \delta_*$ を固定する. このとき十分小さい $\epsilon_0 > 0$ と任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0, \delta \in [0, \delta_1]$ に対して, $L_{\delta, \epsilon}$ は $X^{2,t}$ 上で *bijective* となり, その逆作用素を $K_{\delta, \epsilon}$ とおくと, 次が成り立つ: ある定数 C が存在して,

$$\|K_{\delta, \epsilon} f\|_{W^{2,t}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^t(\Omega)}, \quad f \in X^t.$$

C は $\epsilon \in (0, \epsilon_0), \delta \in [0, \delta_1]$ について一様に取れる.

特に, $X_\nu^{2,t}$ 上で, $\text{Ker}(L_{\delta, \epsilon}) = \{0\}$ となることは, 背理法で証明されるが, $\Delta - 1 + f'_\delta(w_\delta)$ が各軸 $x_j, j = 1, 2, \dots, N$ に関して対称な空間上で非退化となることに帰着されることになる. ここが x_N -軸対称性のある領域上での問題の解析が易しくなるポイントである. この視点は既に [NT3] にあるが, 以下の評価を含め, パラメータ δ に関する一様評価を含めた議論をしなくてはならないことに注意する必要がある. ここでの定数 C は, 最初は δ, ϵ にも依存するかもしれない形でしか証明されないが, 結果的には一様に取れることがわかる. 詳しいことは, [KuMo1, Lemma 3.2, Lemma 5.1] を参照されたい.

パラメータに連続に依存する解を近似解の近くに縮小写像の原理を用いて見つける際, 以下の一様評価で十分である. ここで, 上の結果を $t > \max(N/2, 1)$ で適用して, 埋め込み定理 $W^{2,t}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ より, $g \in X^\infty$ に対しては $K_{\delta, \epsilon} g \in X^\infty$ となることがわかることに注意しておく.

Lemma 2 $\delta_1 < \delta_*$ を固定したとき, ある定数 C_0 が存在して, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0, \delta \in [0, \delta_1]$ に対し一様評価

$$\|K_{\delta, \epsilon} g\|_\infty \leq C_0 \|g\|_\infty, \quad g \in X^\infty$$

が成り立つ.

これも背理法によって示すことができる. 証明は [KuMo1, Lemma 3.3] を参照.

4 パラメータを固定した非線形楕円型境界値問題の解の構成とパラメータ依存

解 u を $u = U_{\delta, \epsilon}(x) + \epsilon \phi(x)$, $\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, C は ϵ, δ によらない定数, の形で求めたい. 方程式に代入し,

$$L_{\delta, \epsilon}[\phi] + g_{\delta, \epsilon} + M_{\delta, \epsilon}[\phi] = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, \quad (x \in \partial\Omega).$$

ここで,

$$g_{\delta,\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon}(\epsilon^2 \Delta U_{\delta,\epsilon} - U_{\delta,\epsilon} + f_\delta(U_{\delta,\epsilon})),$$

$$M_{\delta,\epsilon}[\phi] := \frac{1}{\epsilon}(f_\delta(U_{\delta,\epsilon} + \epsilon\phi) - f_\delta(U_{\delta,\epsilon}) - \epsilon f'_\delta(U_{\delta,\epsilon})\phi).$$

線形化作用素 $L_{\delta,\epsilon}$ の可逆性から, $K_{\delta,\epsilon} = L_{\delta,\epsilon}^{-1}$ として,

$$\phi = -(K_{\delta,\epsilon}g_{\delta,\epsilon} + K_{\delta,\epsilon}M_{\delta,\epsilon}[\phi]) =: T_\delta[\phi]$$

と書き換えられる. T_δ の不動点として ϕ を求めたい. T_δ の δ に関する連続性ととも, T_δ が縮小写像となることを示して, その不動点 $\phi_{\delta,\epsilon}$ の存在と δ についての連続性を示す ([Zeidler] 参照). 必要な評価は次の通り.

Lemma 3 (1) $g_{\delta,\epsilon}$ は各 ϵ で $\delta \in [0, \delta_*)$ に関して $C^0(\overline{\Omega})$ の位相で連続である.

(2) $\delta_1 < \delta_*$ を固定したとき, ある $\epsilon_0 > 0$ と $C_1 > 0$ が存在して, 任意の $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ と $\delta \in [0, \delta_1]$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sup_{x \in \Omega} |g_{\delta,\epsilon}(x)| \leq C_1.$$

ここで C_1 は ϵ, δ によらない定数である.

証明は [KuMo1, Lemma 3.4, 3.5] を参照のこと. また $M_{\delta,\epsilon}[\phi]$ の項は, ϕ に関して高次項であって, 次が成り立つ.

Lemma 4 ある定数 $C_2 > 0$ (ϵ, δ によらない) が存在して次が成り立つ.

$$\|M_{\delta,\epsilon}[\phi]\|_\infty \leq C_2 \epsilon^{p-1} \|\phi\|_\infty^p,$$

$$\|M_{\delta,\epsilon}[\phi_1] - M_{\delta,\epsilon}[\phi_2]\|_\infty \leq C_2 \epsilon^{p-1} \max\{\|\phi_1\|_\infty^{p-1}, \|\phi_2\|_\infty^{p-1}\} \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty.$$

ここで $\|\phi\|_\infty := \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$.

これらより, T_δ の不動点 $\phi_{\delta,\epsilon}$ が

$$B := \{\phi \in C^0(\overline{\Omega}) : \phi(x', x_N) = \phi(|x'|, x_N), \|\phi\|_\infty \leq 2C_0C_1\}$$

のなかに存在することが導かれる. ここで C_0 は $\delta_1 < \delta_*$ を固定したときの $0 < \epsilon < \epsilon_0, \delta \in [0, \delta_1]$ での一様評価

$$\|K_{\delta,\epsilon}g\|_\infty \leq C_0\|g\|_\infty, \quad g \in X^\infty$$

に現れる定数である.

Proposition 3 $0 < \delta_1 < \delta_*$ を 1 つ固定する. 十分小さな $\epsilon_0 > 0$ (必要な先ほどの ϵ_0 よりさらに小さくにとって) が存在して, 任意の $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $\delta \in [0, \delta_1]$ に対して, 次が成立する:

$$\|T_\delta[\phi]\|_\infty \leq 2C_0C_1, \quad \phi \in B;$$

かつ

$$\|T_\delta[\phi_1] - T_\delta[\phi_2]\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty, \quad \phi_1, \phi_2 \in B.$$

Proof. 実際, $\epsilon_0 > 0$ を

$$C_0C_2\epsilon_0^{p-1}(2C_0C_1)^p < C_0C_1$$

なるように取る. このとき, $\epsilon < \epsilon_0$, $\phi, \phi_1, \phi_2 \in B$ に対して

$$\begin{aligned} \|T_\delta[\phi]\|_\infty &\leq \|K_{\delta,\epsilon}g_{\delta,\epsilon}\|_\infty + \|K_{\delta,\epsilon}M_{\delta,\epsilon}[\phi]\|_\infty \\ &\leq C_0(C_1 + C_2\epsilon^{p-1}(2C_0C_1)^p) \leq 2C_0C_1, \\ \|T_\delta[\phi_1] - T_\delta[\phi_2]\|_\infty &\leq \|K_{\delta,\epsilon}(M_{\delta,\epsilon}[\phi_1] - M_{\delta,\epsilon}[\phi_2])\|_\infty \\ &\leq C_0C_2\epsilon^{p-1}(2C_0C_1)^{p-1}\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. $\square$

さらに

$$\|(K_{\delta,\epsilon} - K_{\delta',\epsilon})\phi\|_\infty \leq \omega(\delta, \delta')\|\phi\|_\infty$$

で $\omega(\delta, \delta') \rightarrow 0$ as $\delta' \rightarrow \delta$ なる評価式も成立する. これらより, T_δ の δ に関する連続性も確かめることによって, 縮小写像の原理から, T_δ の不動点 $\phi_{\delta,\epsilon}$ が存在することになって, $\phi_{\delta,\epsilon}$ は δ に関して $C^0(\overline{\Omega})$ 位相で連続でもある.

このとき, $u_{\delta,\epsilon}(x) = U_{\delta,\epsilon}(x) + \epsilon\phi_{\delta,\epsilon}(x)$ は求める解となっている.

5 シャドウ系の(定常)解の存在

解 $u_{\delta,\epsilon}$ に対して,

$$\int_{\Omega} u_{\delta,\epsilon}^r dx$$

の漸近挙動を調べたい. そのための 1 つの重要な評価が次である:

Theorem 2 $0 < \delta_1 < \delta_*$ を固定する. このとき, 十分小さい $\epsilon_0 > 0$ と正の数 C, C' が存在して, 次が成立する. 任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0, \delta \in [0, \delta_1]$ に対して,

$$u_{\delta, \epsilon}(x) \leq C \exp\left(-\frac{C'}{\epsilon} d(x, P)\right), \quad x \in \Omega.$$

ここで $P = \{P_j\}_{j=1}^m$ は指定されたピークの集合. C, C' は ϵ, δ によらない定数である.

先の解の構成時では, $u_{\delta, \epsilon}(x) = U_{\delta, \epsilon}(x) + \epsilon \phi_{\delta, \epsilon}(x)$ で, $|\phi_{\delta, \epsilon}(x)| \leq M$, (M は δ, ϵ によらない一定値) しかわかっていなかったのであるが, この評価によって, 解 $u_{\delta, \epsilon}$ は, 集合 P から一定の距離はなれると, 一様な減衰: $u_{\delta, \epsilon}(x) \leq C \exp(-C' C''/\epsilon)$ をもつことになり, 一方で P の各点では一定値以上の値を常に持つことが構成からわかるので, 集合 P の各点に凝縮することを表すことになる. これから簡単な考察により次が得られる.

Proposition 4 各 $r \geq 1$ と $0 < \eta < 1$ に対して, ある定数 $C(\epsilon, \delta$ によらない) が存在して, 次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} |\phi_{\delta, \epsilon}(x)|^r dx \leq C \epsilon^{\eta N}.$$

Proof. 各点 P_j の周りで, 半径 ϵ^η の内部と外部に分けてそれぞれ評価すればよい. 特に外部領域では $\phi_{\delta, \epsilon}(x) = \epsilon^{-1}(u_{\delta, \epsilon}(x) - U_{\delta, \epsilon}(x))$ と先の Theorem より,

$$|\phi_{\delta, \epsilon}(x)| \leq \frac{C}{\epsilon} \exp(-C'/\epsilon^{1-\eta}) \leq C'' \epsilon^{\eta N}$$

となることを用いる. $\square$

近似解 $U_{\delta, \epsilon}$ に対しては, 以下が成立する. 本質的には, [NT1,3] の計算によるが, ここでは δ に関する一様性を含めた主張である.

Lemma 5 $\delta_1 < \delta_*$ を固定したとき, $\delta \in [0, \delta_1]$ に関して一様に次が成立する:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon^{-N} \int_{\Omega} U_{\delta, \epsilon}^r(x) dx = m \int_{\mathbf{R}^N} w_\delta^r(y) dy.$$

この Lemma の証明は, [KuMo1, Lemma 4.5] 参照. この Lemma と上の Lemma から, 次を得る.

Lemma 6 $\delta_1 < \delta_*$ を固定したとき, $\delta \in [0, \delta_1]$ に関して一様に次が成立する:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon^{-N} \int_{\Omega} u_{\delta, \epsilon}^r(x) dx = m \int_{\mathbf{R}^N} w_\delta^r(y) dy.$$

Proof. $|a^r - b^r| \leq r2^r(a^{r-1} + b^{r-1})|a - b|$, $a, b > 0$ なる不等式を用いて

$$\begin{aligned} & |2\epsilon^{-N} \int_{\Omega} u_{\delta,\epsilon}^r dx - 2\epsilon^{-N} \int_{\Omega} U_{\delta,\epsilon}^r dx| \\ & \leq 2\epsilon^{-N} r 2^r \int_{\Omega} (u_{\delta,\epsilon}^{r-1} + U_{\delta,\epsilon}^{r-1})(\epsilon \phi_{\delta,\epsilon}(x)) dx \leq C(r) M \epsilon^{1-N} \int_{\Omega} \phi_{\delta,\epsilon}(x) dx = o(1) \end{aligned}$$

を得る. ここで, $U_{\delta,\epsilon}(x), u_{\delta,\epsilon}(x)$ は一様有界であることを用いた. $\square$

次は $p = 2$ の場合に [WW1] によって与えられた.

Lemma 7 $\delta \rightarrow \delta_*(= \delta_*(p))$ のとき, $w_{\delta}(x) \rightarrow c(\delta_*)\delta_*^{-\frac{1}{p}}$ in $C_{loc}^2(\mathbf{R}^N)$ が成り立つ. 特に

$$\int_{\mathbf{R}^N} w_{\delta}(y)^r dy \rightarrow +\infty, \quad \delta \rightarrow \delta_*.$$

Proof. $w(x) = \delta^{-1/p} v(\delta^{\frac{1-p}{2p}} x)$ で

$$\Delta v(y) + g_{\delta}(v(y)) = 0, \quad g_{\delta}(t) = -\delta^{1-(1/p)} t + \frac{t^p}{1+t^p}$$

となる. $g_{\delta}(t)$ は δ に関して減少関数であることに注意すると, $b(\delta)$ は単調増加関数, $c(\delta)$ は単調増加関数となる. よって, $\delta < \delta_*$ に対して $c(\delta) < c(\delta_*)$ となり, $v_{\delta}(x) < c(\delta) < c(\delta_*)$ となって一様有界となる.

$$\Delta v - \delta^{\eta} v + \frac{v^p}{1+v^p} = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N$$

から, 楕円型評価より, 任意のコンパクト集合 K に対して $\{v_{\delta}\}_{\delta_0 < \delta < \delta_*}$ は一様な $C^{1,\alpha}$ 評価をえる. これより, ある V が存在して $v_{\delta}(x) \rightarrow V(x)$ in $C_{loc}^1(\mathbf{R}^N)$ が $\delta \rightarrow \delta_*$ で成り立つ. 特に,

$$\Delta V(y) - \delta_*^{1-(1/p)} V + \frac{V^p}{1+V^p} = 0.$$

ここで $v = v_{\delta}(x)$ は球対称であるので

$$v''(r) + \frac{N-1}{r} v'(r) + g_{\delta}(v) = 0$$

であるので $v'(r)$ をかけて積分して

$$\frac{v'(r)^2}{2} + G_{\delta}(v(r)) \leq G_{\delta}(v(0))$$

を得る. $r \rightarrow +\infty$ とすることで, $G_\delta(v(0)) \geq 0$ を得る. このことは $\theta(\delta) > 0$ を $G_\delta(\theta(\delta)) = 0$ となるものと定めるとき, $v_\delta(0) \geq \theta(\delta)$ が成り立つこととなる. $\delta \rightarrow \delta_*$ で $\theta(\delta) \rightarrow c(\delta_*)$ となることに注意すると, $v_\delta(0) \leq c(\delta)$ とあわせて

$$V(0) = c(\delta_*)$$

となる. また $V(r) \leq V(0) = c(\delta_*)$ でもあるので $V'(0) = 0$ となるが, 常微分方程式の一意性より $V(x) \equiv c(\delta_*)$ となる. $\square$

さて,

$$\beta_\epsilon(\delta) := \delta \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_{\delta,\epsilon}(x)^r dx \right)^{\frac{p}{r-(s+1)}}$$

とおく. 次は, シャドウ系の解の存在を与えるものである.

Proposition 5

$$k_\epsilon := (2\epsilon^{-N} |\Omega|)^{\frac{p}{r-(s+1)}} \kappa$$

とおき, ある定数 $k_0 \in [0, +\infty)$ が存在して,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_\epsilon = k_0$$

なることを仮定する. このとき, ある $\delta_\epsilon \in (0, \delta_*)$ が存在して,

$$\beta_\epsilon(\delta_\epsilon) = k_\epsilon$$

が成り立つ.

Proof. 仮定から, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_\epsilon = k_0$. このとき $k_0 < k_1$ なる k_1 を 1 つとり,

$$k_1 = \delta_1 \left(m \int_{\mathbf{R}^N} w_{\delta_1}^r(y) dy \right)^{\frac{p}{r-(s+1)}}$$

なる $\delta_1 \in (0, \delta_*)$ が存在する. このとき, $\epsilon \rightarrow 0$ で

$$\beta_\epsilon(\delta_1) = \delta_1 (2\epsilon^{-N} \int_{\Omega} u_{\delta_1,\epsilon}(x)^r dx)^{\frac{p}{r-(s+1)}} = k_1 + o(1)$$

となる. よって, ある $\epsilon_0 > 0$ が存在して, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対して, $\beta_\epsilon(\delta_1) > k_\epsilon$ が成立する. $\beta_\epsilon(0) = 0$ と $\beta_\epsilon(\delta)$ の δ に関する連続性より, 中間値の定理から, ある $\delta_\epsilon \in (0, \delta_1)$ が存在して, $\beta_\epsilon(\delta_\epsilon) = k_\epsilon$ が成り立つこととなる. $\square$

6 Gierer-Meinhardt 系の解の存在

D が十分大きいときに, シャドウ系の解の近くに Gierer-Meinhardt 系の解を陰関数定理 (通常のものでどれでもよいが, 例えば [Zeidler] 参照) を用いて構成する. ここでは, $u_{\epsilon,\delta}$ の線形化作用素:

$$\mathcal{L}_{\delta,\epsilon} := \Delta - 1 + f'_\delta(u_{\delta,\epsilon}(x))$$

の可逆性とその逆作用素の評価がキーポイントとなる. これは $L_{\delta,\epsilon} = \Delta - 1 + f'_\delta(U_{\delta,\epsilon}(x))$ との差が小さいことからわかる. 詳細は [KuMo1, section 5] 参照.

References

- [BDS] P. Bates, E.N.Dancer and J.Shi, Multi-spike stationary solutions of the Cahn-Hilliard equation in higher-dimension and instability, Adv. Diff.Equations 4(1999), 1-69.
- [BS] P. Bates and J. Shi, Existence and instability of spike layer solutions to singular perturbation problems, J. Fun. Anal., 196(2002), 211-264.
- [BL]H. Berestycki and P.L.Lions, Nonlinear scalar field equations I, Arch. Rat. Mach. Anal., 82(1983), 313-345.
- [BGK]H.Berestycki, T.Gallout and O.Kavian, Nonlinear Euclidean scalar field equations in the plane, C.R. Acad. Sci. Paris Ser.I Math. 297(1983), 307-310.
- [KSWW] T. Kolokolnikov, W.Sun, M.J. Ward and J.Wei, The stability of a stripe for the Gierer-Meinhardt model and the effect of saturation, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 5(2006), 313-363.
- [KuMo1]K. Kurata and K. Morimoto, Construction and asymptotic behavior of multi-peak solutions to the Gierer-Meinhardt system with saturation, Comm. Pure Appl. Anal., 7(2008), 1443-1482.
- [KuMo2] K. Kurata and K. Morimoto, in preparation
- [KZ] M.K.Kwong and L.Q. Zhang, Uniqueness of the positive solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in an annulus, Diff.Integ. Equations 4(1991), 583-599.
- [三村] 三村 昌泰, 生物の増殖と空間分布, in 「非線型の現象と解析」 山口昌哉編著, 日本評論社, 1996. 55-80.
- [永井] 永井 敏隆, 走化性モデルにおける集中現象, in 「爆発と凝集」, 柳田英二編, (2006), 99-143.

[西浦] 西浦 廉政, 非線形問題 1 -パターン形成の数理-, 岩波講座 現代数学の展開, 1999.

[Ni] W.M.Ni, Qualitative properties of solutions to elliptic problems, in *Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations Vol. 1*, Edt. by M.Chipot and P. Quittner, North-Holland, 2004, 157-233.

[NT1] W.M. Ni and I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(1991), 819-851.

[NT2] W.M. Ni and I. Takagi, Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, *Duke Math. J.*, 70(1993), 247-281.

[NT3] W.M. Ni and I. Takagi, Point condensation generated by a reaction-diffusion system in axially symmetric domains, *Japn J. Indust. Appl. Math.*, 12(1995), 327-365.

[OS] T. Ouyang and J. Shi, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problems: II, *J. Diff. Equations* 158(1999), 94-151.

[SWW] B.D. Sleeman, M.J. Ward and J. Wei, The existence and stability of spike patterns in a chemotaxis model, *SIAM J. Appl. Math.*, 65(2005), 790-817.

[Suzuki] T. Suzuki, *Free Energy and Self-Interacting Particles*, Birkhäuser, 2005.

[高木] 高木 泉, 反応拡散系に現れる点凝集現象, in 「爆発と凝集」, 柳田英二編, (2006), 51-98.

[田中] 田中 和永, 非線形問題 2 -変分問題入門-, 岩波講座 現代数学の展開, 2000.

[WW1] J. Wei and M. Winter, On the Gierer-Meinhardt system with saturation, *Comm. in Contem. Math.*, 6(2004), 259-277.

[WW2] J. Wei and M. Winter, Stationary multiple spots for reaction-diffusion systems, *J. Math. Biol.*, 57(2008), 53-89.

[Zeidler] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and applications I*, Springer-Verlag, 1986.

Kazuhiro Kurata
Tokyo Metropolitan University
E-mail: kurata@tmu.ac.jp

メモ

一次元圧縮性粘性流体の長時間挙動¹

松村 昭孝

大阪大学大学院情報科学研究科

1. 初めに

本講演では、空間一次元での粘性保存則系と呼ばれる双曲-放物型の非線形微分方程式系の時間大域解の存在とその漸近挙動について、最近までの結果の概説や未解決問題の紹介をさせていただきます。ただ、粘性保存則系と言っても、もっぱらその典型的な例である Burgers 方程式や、圧縮性粘性流体の一次元運動を記述する方程式系を中心にお話しさせていただきます。

2. 粘性保存則系

空間一次元における粘性保存則系は次のような形の非線形偏微分方程式です：

$$(1) \quad u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad (x \in \mathbf{R}, \quad t > 0),$$

ここに、 $u = u(t, x)$, $f = f(u)$ はベクトル値関数 $u : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ であり、それぞれ保存量、流束と呼ばれます。また、 $B : \mathbf{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$ は非負定値な行列値関数で粘性項の係数行列を表します。粘性項がない系 ($B = 0$) を単に保存則系と呼びますが、このとき系が双曲型となるために、流束 f のヤコビ行列 $df(u)$ は状態空間 $\mathbf{R}^m$ のある領域 Ω 上で一様に相異なる実固有値 (特性速度) $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \cdots < \lambda_m(u)$ を持つと仮定します。また、 $\lambda_i(u)$ に対応する右固有ベクトルを $r_i(u)$ としたとき、各 i について Ω 上で一様に $(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) \neq 0$ であるか、 $(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) = 0$ であることを仮定します。前者のとき第 i 特性場は“真に非線形”、後者のとき第 i 特性場は“線形退化”であると云います。次に $B(u)$ に関してですが、正值でなくとも系全体ではエネルギー消散的な構造があることを仮定します。このための十分条件として次の条件が特に有用です (Kawashima[12])：

$$(2) \quad B(u)r_i(u) \neq 0 \quad (u \in \Omega, i = 1, \dots, m).$$

この条件は多次元の場合も込めたもの (u での線形化方程式系の双曲型部分の定在波ベクトルが $B(u)$ の核に属しないこと) を一次元の場合に簡略化し書いたものですが、“Kawashima condition” として知られ、双曲-放物型方程式系を一般的状況で考えるときの標準となっています。以上のような諸条件を満たす典型であり、また粘性保存則系の研究の動機付けとなっている例として次の3例を上げておきます。

Burgers 方程式：

$$(3) \quad u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \mu u_{xx}.$$

ここに、 μ は粘性係数 (正定数) です。

粘性気体の等エントロピーモデル：

$$(4) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = \mu w_{xx}. \end{cases}$$

¹この講演ノートは、平成 19 年の微分方程式の総合的研究における講演でのノートを使用しています

ここに, ρ は質量密度, w は流速, μ は粘性係数 (正定数), p は圧力で, 気体が等温的や等エントロピー的なとき p は状態方程式

$$p = a\rho^\gamma$$

で与えられ, γ は比熱比 (≥ 1 なる定数), a はある正定数です.

粘性及び熱伝導を考慮した理想気体モデル系 :

$$(5) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = \mu w_{xx}, \\ (\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = (\kappa \theta_x + \mu w w_x)_x. \end{cases}$$

ここに, θ は絶対温度, κ は熱伝導係数 (正定数), e は単位質量あたりの内部エネルギーで, 気体が理想的でポリトロピックのとき p, e は状態方程式

$$p = R\rho\theta, \quad e = \frac{R}{\gamma - 1}\theta$$

で与えられます (R は気体定数).

3. 初期値問題

講演の前半では主に初期値問題についてお話しします. 粘性保存則系 (1) に次の初期条件と空間遠方での状態 $u_\pm \in \Omega$ を与えた初期値問題を考えます :

$$(6) \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = u_\pm \quad (t \geq 0).$$

このとき, 私たちの興味は初期値問題 (1)(6) の時間大域解の存在と, 特に空間遠方での状態 $u_\pm$ に応じて解がどのような漸近挙動を見せるかにあります. 理想的には, 有界で適当に滑らかな任意の初期値に対し時間大域解が先に求められ, 改めてその大域解に対する漸近挙動をゆっくり考えることが出来ればよいのですが, そうは上手く行きません. 単独方程式の場合は最大値原理によりアプリアリオリ評価が得られ, これが可能ですが, 系の場合は単純なものを除けば, Itaya [10](1976) による粘性気体の等温度モデル ((4) で $\gamma = 1$) の場合にのみ時間大域解が構成されており, 他の場合は全く未解決な問題です. そこで, 作戦を変更し, なんらかの考察で解の漸近形が近似的にも構成でき, これが漸近安定であろうと期待すると, この漸近形の小近傍に解を制限することでアプリアリオリ評価が得られ, 少なくともその小近傍では時間大域解の存在とその漸近形への漸近も同時に得られるのではないかと考えます. では, どの様に漸近形を予想するのでしょうか. 一番簡単に予想できるのは, $u_- = u_+ = \bar{u}$ のときで, $u = \bar{u}$ が定数自明解であることから, 解は $\bar{u}$ に漸近すると予想するのが自然です. 実際, 一般にエントロピー関数を持つ系が, Kawashima condition を満たすときには $u = \bar{u}$ のある Sobolev 空間での小近傍に時間大域解が構成され, 減衰評価も込めて解の $\bar{u}$ への漸近が示されています (Kawashima [12], 1987). 論文 [12] では, さらに解の漸近形の次のレベルとして, 解は m 個の各特性場に応じた拡散波の重ね合わせに漸近することが示されています. 拡散波への漸近の議論は, Burgers 方程式に対する Hopf [3](1950) に始まり, 後 Nishida [27](1986), Kawashima [12], Liu [18](1985) 等により系の場合に発展がなされ, 後述する粘性衝撃波の漸近安定性の議論に重要な役割を果たすこととなります (最近, 単独方程式について, Kato [11](2007) により最善の減衰評価が得られています). では, 一般の $u_\pm$ の場合ですが, 実は波の伝播の様相は双曲型方程式系部分の解, それも次の Riemann 問題と呼ばれる初期値問題の弱解 (Riemann 解) により特徴付けられるのです :

$$(7) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (x \in \mathbf{R}, t > 0), \\ u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

この問題は Riemann が 1860 年の論文 [29] において、気体中を伝播する非線形音響波の考察 (系 (4) で $\mu = 0$ とした 2×2 の Euler 方程式系を考察) のために提唱したもので、解のミクロ的およびマクロ的構造に深く関わる基本的な問題です。Riemann はこの論文中で、後に Lax [17](1957) で大きく発展する非線形保存則系の数学理論における多くの基礎的概念や線形双曲型方程式のリーマン関数の概念などを導入しています。Lax は論文 [17] の中で、保存則系が前述の条件を満たしているとき、Riemann 問題は基本的な単純波として、真に非線形の特性場に対応しては“衝撃波”または“希薄波”を持ち、線形に退化した特性場に対応しては“接触不連続波”を持つことを示し、さらには一般の Riemann データに対しては、いわゆる“Lax の衝撃波条件”(真に非線形である場においての不連続面は対応する左右の特性曲線がぶつかり合うときのみ起こるとする条件)の下、 $|u_+ - u_-|$ が小であれば Riemann 解は m 個の各特性場に応じた単純波の重ね合わせで一意的に構成されることを示しました。衝撃波は波が圧縮されて不連続面が定速度で進行する波で、希薄波は波が引き伸ばされ生じる波、接触不連続波は不連続面が周辺ごと定速度で進行する波です。単独で真に非線形な粘性保存則について、この Riemann 解と対応する粘性保存則の解の漸近挙動との関係を本格的に論じた最初の論文が Il'in-Oleinik [9](1960) です。この中で彼らは粘性保存則の解は、Riemann 解が希薄波のときは、粘性効果があまり働かずこの希薄波自体に、Riemann 解が衝撃波のときは、粘性効果により衝撃波が平滑化された進行波(これを粘性衝撃波という)に漸近して行くことを最大値原理を用い示しました。この事と、系の場合の各単純波は異なる特性速度で伝播し互いに離れて行くことから、系の場合でも Riemann 解の構造に応じて、粘性保存則系の解の漸近形は希薄波、粘性衝撃波、粘性接触波(接触不連続波が粘性効果で緩和されたもの)の重ね合わせとなることが予想されるのです。これらの波の漸近安定性については、系の場合への最大値原理の適用が困難なことから、長い間未解決問題でしたが、Nishihara-M [23](1985), [24](1986), Goodman [1](1986) の論文を切っ掛けに、エネルギー法を用いて単一の衝撃波や希薄波の近傍での取り扱いが条件付ながら可能となり、以後多くの結果が得られることとなりました。しかしながら、特性場に線形退化なものを含み、Riemann 解に接触不連続波を含む場合の結果は殆どありませんでした。最近になって、特性場に線形退化なものを含む典型例である粘性気体の 3×3 の系 (4) について、Riemann 解に接触不連続波を含む場合についても結果が得られるようになって来ました。講演ではこれまでの流れの概要と、粘性気体の系 (4) の初期値問題についての最近の結果を紹介したいと思います。

4. 理想気体モデルの初期値問題

粘性と熱伝導を考慮した理想気体モデル系 (4) の初期値問題に対する最近までの結果を簡単に纏めておきます。天下りですが、初期値問題では、Euler 座標系で記述された系 (4) は質量 Lagrange 座標系を用いると、 $v = 1/\rho$ を比体積として、次の系と同等となることが知られていますので、ここではこちらを使わせて貰います：

$$(8) \quad \begin{cases} v_t - w_x = 0, \\ w_t + p_x = \mu \left(\frac{w_x}{v} \right)_x, \\ \left(e + \frac{w^2}{2} \right)_t + (pw)_x = \left(\kappa \frac{\theta_x}{v} + \mu \frac{w w_x}{v} \right)_x, \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R}^1, t > 0).$$

ここに、 p と e についての状態方程式は

$$p = \frac{R\theta}{v}, \quad e = \frac{R}{\gamma - 1} \theta$$

となります。方程式系 (8) を初期条件

$$(9) \quad (v, w, \theta)(x, 0) = (v_0, w_0, \theta_0)(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

および、空間遠方での条件

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v, w, \theta)(t, x) = (v_{\pm}, w_{\pm}, \theta_{\pm}) \quad (t > 0)$$

の下に考察することとなります。ここに、 $v_{\pm}(>0), w_{\pm}, \theta_{\pm}(>0)$ は与えられた定数で、初期値は適合性条件

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v_0, w_0, \theta_0)(x) = (v_{\pm}, w_{\pm}, \theta_{\pm}),$$

および

$$\inf_{x \in R^1} v_0(x) > 0, \quad \inf_{x \in R^1} \theta_0(x) > 0$$

を満たすとします。このとき、対応する Riemann 問題は次で与えられます：

$$(11) \quad \begin{cases} v_t - w_x = 0, \\ w_t + p_x = 0, \\ (e + \frac{w^2}{2})_t + (pw)_x = 0, & (x \in \mathbf{R}, t > 0), \\ (v, w, \theta)(x, 0) = (v_0^R, w_0^R, \theta_0^R)(x) := \begin{cases} (v_-, w_-, \theta_-), & x < 0, \\ (v_+, w_+, \theta_+), & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Riemann 問題 (11) における保存則系は、正の v と θ に対し、3 個の相異なる固有値（特性速度）

$$\lambda_1 = -\sqrt{\gamma p/v} < 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_1 > 0$$

を持ち、第 1 特性場と第 3 特性場は真に非線形であり、第 2 特性場は線形退化していることが分かります。このことから、Riemann 解は第 1, 第 3 特性場の希薄波または衝撃波と第 2 特性場の接触不連続波の 18 通りの組み合わせとして与えられます。以下簡単のために、 $z = (v, w, \theta), z_{\pm} = (v_{\pm}, w_{\pm}, \theta_{\pm})$ と略記し、また左方の定数状態 z_- を任意に与えたとき、右方の定数状態 z_+ は必要に応じ z_- の R^3 での適当な小近傍にあるとします。

1) Riemann 解が、第 i 特性場 ($i = 1, 3$) に対応した単一の希薄波 $z_i^r(x/t)$ で構成される場合、Kawashima-Nishihara-M [14] (1986) において、この希薄波の小近傍に初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が存在し、時間と共にこの双曲型部分の波である希薄波 $z_i^r(x/t)$ に漸近することが示されています。Riemann 解が二つの希薄波 $z_1^r(x/t)$ と $z_3^r(x/t)$ で構成される場合も、同様に取り扱うことが可能で、この場合、時間大域解は二つの希薄波の線形結合 $z_1^r(x/t) + z_3^r(x/t) - z_m$ に漸近することが示されます。ここに、 z_m は $z_{\pm}$ から一意的に決まる中継的な定数状態であり、 $z_1^r(x/t)$ が z_- を z_m に繋ぎ、 $z_3^r(x/t)$ が z_m を z_+ に繋ぐものです。何れの場合も、証明は希薄波の単調性を利用したエネルギー法でなされます。

2) Riemann 解が、線形退化した第 2 特性場に対応した単一の接触不連続波で構成される場合は、Huang-Xin-M [6](2006) において、粘性系 (8) を高レベルで近似する“粘性接触波” $z_2^{vc}(x/\sqrt{t})$ が構成され、この粘性接触波の小近傍において、積分平均が零の初期擾乱に対し初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が存在し、時間と共にこの粘性接触波 $z_2^{vc}(x/\sqrt{t})$ に漸近することが示されています。証明は、初期擾乱の積分平均零を用い、一度積分した系を考え、これにエネルギー法を工夫してなされます。その後、Huang-Xin-Yang [8] で、初期擾乱の積分平均零を仮定しない場合への拡張がなされています。ここでは、積分した系に問題を持ち込むために、第 1 及び第 3 特性場に対応した拡散波も利用しています。さらに最近、積分した系を用いないですむエネルギー法が工夫され、これまでの証明を簡単にするばかりでなく、Riemann 解が接触不連続解と希薄波で構成される場合の取り扱いが可能となりました (Huang-Li-M [4])。

3) Riemann 解が、第 i 特性場 ($i = 1, 3$) に対応した単一の衝撃波 $z_i^s(x - s_i t)$ (s_i : 衝撃波速度, $s_1 < 0 < s_3$) で構成される場合は、これに対応して粘性系 (8) は z_- を z_+ に繋ぐ“粘性衝撃波”と呼ばれる進行波 $z_i^{vs}(x - s_i t)$ を持ち、またこの進行波は空間方向のシフトに関して自由度を持つことが知られています。このとき、この粘性衝撃波の小近傍に、初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が

存在し、解はある α_i だけ空間シフトした粘性衝撃波 $z_i^{vs}(x - s_i t + \alpha_i)$ に漸近することが予想されます。この漸近性は、Kawashima-M [13](1985) により始めて、積分平均零の初期擾乱に対し示されました (シフト $\alpha_i = 0$ の場合に対応)。証明は、初期擾乱の積分平均ゼロを用い、問題を一度積分した系に付いての問題に再定式化した後、粘性衝撃波の単調性を利用したエネルギー法を工夫することで与えられます。一般の積分平均零を仮定しない場合には、シフト α_i を決めることが難しい問題となるのですが、Liu [18](1985) は、第 i 番目以外の特性場に対応する“拡散波” (真に非線形な場では Burgers 方程式、線形退化な場では熱方程式の自己相似解を用いる) を定義し、初期擾乱から一意にシフト α_i と各拡散波の強度を決める規範を提唱しました。Liu の議論を発展させ、Szepessy-Xin [28](1993) は、粘性項を人工粘性項 εu_{xx} に置き換えた系に対して、積分平均零を仮定しない初期擾乱に対する漸近安定性を示しました。しかしながら、系 (4) のような退化した物理的粘性項に対しては、Liu [19] での近似的基本解による詳細な各点評価を用いた手法や、Zumbrun [30],[31] などによる一般論 (Evans 関数を用いた線形化方程式のスペクトル解析とエネルギー法の組み合わせ) からの壮大な試みに拘わらず、未だに明快なものとはなっていません (2×2 の粘性気体の系については Mascia-Zumbrun [20] を参照)。より簡明な手法が望まれるところです。

3.2. Riemann 解が、衝撃波と希薄波とで構成されている場合は、 2×2 の粘性気体の系について さえ、全くの未解決な問題です。粘性衝撃波と希薄波の扱いの手法が違うことと、伝播速度が違うとは言え両者の相互作用が他の場合より強いことが問題を困難なものにしています。軌道安定性の議論も視野に入れた新たな手法が必要と思われます。

3.3. Riemann 解が、二つの衝撃波 $z_1^s(x - s_1 t)$ と $z_3^s(x - s_3 t)$ で構成される場合も最近まで未解決の問題の一つでした。この場合解は、対応する二つの粘性衝撃波の線形結合

$$z_{\alpha_1, \alpha_3}(x, t) := z_1^{vs}(x - s_1 t + \alpha_1) + z_3^{vs}(x - s_3 t + \alpha_3) - z_m$$

に漸近することが予想されます。ここに、 α_1 と α_3 はそれぞれの粘性衝撃波のシフトを表します。また z_m は $z_{\pm}$ から一意に決まる中継的な定数状態で、 $z_1^s(x - s_1 t)$ が z_- を z_m に、 $z_3^s(x - s_3 t)$ が z_m を z_+ に繋ぎます。最近、Huang-M [5] により $z_{0,0}(x, 0)$ の小近傍に初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が存在すると共に、初期擾乱からシフト α_1, α_3 が一意に決まり、解は $z_{\alpha_1, \alpha_3}(x, t)$ に漸近することが示されました。証明は、定数状態 z_m の周りでの第 2 特性場に対応する線形退化な拡散波を系 (4) 固有の構造を上手く利用して構成し、上でも述べた Liu [18] によるシフト α_1, α_3 と拡散波の強度の決まり方の議論と Kawashima-M [13] のエネルギー法の議論を組み合わせてなされます。さらに、これに上述した粘性接触波についての新たなエネルギー法を組み合わせることで、Riemann 解が接触不連続波と二つの衝撃波で構成される場合にも取り扱えるようになりました (Huang-Xin-M [7])。しかしながら、Riemann 解が接触不連続解と一つだけの衝撃波で構成される場合には、残りの特性場に対応する非線形拡散波の性質が上記の線形退化拡散波より性質が悪いことから、同じ手法が使えず未解決な問題となっています。

5. 半空間上の初期値境界値問題

講演の後半部分では、前半の初期値問題の結果を頭において、半空間上の初期値境界値問題を取り上げ、境界の影響が解の漸近挙動にどのように影響を与えるかを紹介します。特に、粘性気体の 2×2 の系 (3) に対する、境界の上で流体の流入や流出がある問題 (それぞれ Inflow 問題, Outflow 問題という) を考えます。この場合、解の漸近挙動は、境界上での条件と遠方での状態に依存し、これまで以上に多彩になることが予想されます。実際、粘性の効果と境界条件との相互作用で形成される境界層解と呼ばれる定常解が現れることがあり、解の漸近挙動は、単に境界から離れて行く粘性衝撃波や希薄波ばかりではなく、これらと境界層解の重ね合せに漸近することが一般に起こるのです (3×3 にもなるとこれに粘性接触波までありますからもう大変です)。この Inflow 問題と Outflow 問題については、論文 [21] において、境界層解がいつ現れるのかの規範が、境界条件と対

応する Riemann 問題の解の境界上の値との整合性として提唱されており, これを用い漸近挙動の分類がなされています. 改めて方程式系を書いておきますと

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = \mu w_{xx}, \\ p = a\rho^\gamma. \end{cases} \quad (x > 0, t > 0),$$

いま, 方程式系 (12) に初期条件

$$(13) \quad (\rho, w)(0, x) = (\rho_0, w_0)(x), \quad (x > 0), \quad \inf_{x>0} \rho_0(x) > 0,$$

遠方 $x = +\infty$ での状態を与える条件

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\rho, w)(t, x) = (\rho_+, w_+) \quad (t > 0),$$

および, 境界 $x = 0$ 上で次の 3 種類の境界条件のうちの一つを課して考えます:

Case 1 (境界上, 流速零):

$$(15)_1 \quad w(t, 0) = 0, \quad t > 0.$$

Case 2 (境界上, 流速負):

$$(15)_2 \quad w(t, 0) = w_- < 0, \quad t > 0.$$

Case 3 (境界上, 流速正):

$$(15)_3 \quad w(t, 0) = w_- > 0, \quad \rho(t, 0) = \rho_- > 0, \quad t > 0.$$

ここに, $\rho_\pm$ と $w_\pm$ は与えられた定数であり, 無論初期条件は境界条件 (14) と対応する (15) の中の一つを整合条件として満たすことを仮定します. 上記三つの場合のうち, Case 1 は境界が通常の不透過な壁の場合で, この場合は密度 ρ を偶関数で, 流速 w を奇関数で全空間に拡張することで初期値問題に帰着でき, 従って特別な境界層解は出現しないことが予想できます. Case 2 (resp. Case 3) は固定境界上で流体の一定の流出 (outflow) 量 (resp. 流入 (inflow) 量) が与えられている場合で, 対応する初期値境界値問題を Outflow (resp. Inflow) 問題と呼びます. また, Cases 1, 2 では, 境界の上で質量密度については境界条件が与えられておらず, 一方 Case 3 では, 与えられていることに注意します. これは, 方程式系 (8) の主要部を考えたとき, 第 1 方程式を質量密度 ρ についての双曲型方程式, 第 2 方程式を速度 w について放物型方程式と見たとき, 初期値境界値問題が適切 (well posed) であるために必要だからです. この双曲-放物型方程式系としての初期値境界値問題の適切性と, 波の伝播を支配する系全体の双曲型方程式系の波の伝播の性質との関係が, 後に大きく漸近挙動に影響することとなります. 方程式系 (8) に対する初期値問題については, 講演の前半で述べたように空間遠方 $x = \pm\infty$ での条件

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\rho, w)(t, x) = (\rho_\pm, w_\pm) \quad (t > 0)$$

の下に, 解の漸近挙動は基本的に対応する Euler 方程式に対する Riemann 問題の解と同様な挙動となりました (無論, 不連続面を持つ衝撃波については対応する粘性衝撃波に置き代える). そのため, 解の漸近形としては, 希薄波と粘性衝撃波の組み合わせとして, 全部で 9 種類に分類されます. 一方, 半空間上の初期値境界値問題の場合, 粘性の影響は不連続衝撃波が平滑化され滑ら

かな粘性衝撃波になることにはばかりではなく、境界条件によっては“境界層解”と呼ばれる定常解が形成されることにも現れます(単独方程式系で簡単にこの例を見ることができます)。それでは、いつ境界層解が現れるかですが、次のような規範が有効です。まず、Euler 方程式に対する $x_0 > 0$ を中心とする Riemann 問題を考え、Riemann データの右側のデータとして、(14) の (ρ_+, w_+) を与え、左側のデータとしては (15) を満たす全ての (ρ_-, w_-) を考えて見ます。そのとき、もし左側の Riemann データが唯一に定まって、Riemann 問題の解の境界 ($x = 0$) 上での値が境界条件 (15) を満たせば(つまり、全ての非線形波は境界から離れて行くとき)、境界層解は現れないと予想します。一方、左側の Riemann データをどのようにとっても Riemann 問題の解の境界 ($x = 0$) 上での値が境界条件 (15) を満たさない場合(つまり、境界に入ってくるか定在する非線形波があるとき)境界層解が現れると予想するのです。粗く言うと、Euler 方程式での波の伝播の性質と双曲-放物型方程式系としての境界条件が不整合なとき、この不整合を粘性項の性質で埋め合わせるように定常な境界層解が立ち現れると見るわけです。従って、Euler 方程式に対する特性速度は $w \pm c(\rho)$ (ここに $c(\rho)$ は音速) ですから、解の漸近挙動は境界条件や遠方での条件が亜音速、遷音速、超音速であるかによって大きく影響されることが予想されます。また、この規範でみると、境界層解が現れない Case 1 の結果は改めてよく理解できます。この場合、境界条件 (15) では未定であった $(\rho_-, 0)$ が唯一に定まり、Euler 方程式の Riemann 問題の解が、 $w_+ > 0$ の場合は境界から逃げる希薄波のみ、 $w_+ < 0$ の場合は境界から逃げる衝撃波のみで与えられることから、境界層解は現れず、(12) の解はそれぞれ境界から逃げてゆく希薄波と粘性衝撃波へ漸近していくという訳です。この様に Case 1 の場合は、初期値問題と大きく異なり、ただ 2 種類だけに漸近挙動が分類され、境界の影響により漸近挙動の分類は大きく単純化されることが分かります。実際、この予想が正しいことが $w_+ > 0$ の場合には Nishihara-M [25](2000)、 $w_+ < 0$ の場合については条件付ながら Mei-M [22](1999) で示されました。一方、Inflow 問題や Outflow 問題では、一般に境界層解が現れるために遥かに漸近挙動は複雑に(それゆえに面白くも)なりますが、これについてもこれまで多くの結果が得られています。講演では、単独方程式での境界層解の例を示した後(cf. Hashimoto-M [2])、粘性気体の 2×2 の系 (8) を中心に、上記の規範に従って漸近安定性が示されている幾つかの場合や減衰評価まで込めて得られている場合(cf. [20] とその参考文献, Nishihara-M [25], Kawashima-Nishibata-Nishikawa [15], Nakamura-Nishibata-Yuge [26]) などの結果を紹介します。最後に、粘性気体の 3×3 の系 (4) に対する初期値境界値問題に若干の注意を与え、また全般についての今後の問題を上げて締めくくりにしたいと思います。いま、半空間上で系 (8) を初期条件

$$(16) \quad (v, w, \theta)(0, x) = (v_0, w_0, \theta_0)(x) \quad (x > 0)$$

と、空間遠方での条件

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (v, w, \theta)(t, x) = (v_+, w_+, \theta_+) \quad (t > 0)$$

および、境界 $x = 0$ 上での境界条件(流速についてディリクレ零、絶対温度についてノイマン零条件)

$$(18) \quad w(t, 0) = 0, \quad \theta_x(t, 0) = 0, \quad (t > 0)$$

を課す初期値境界値問題を考えます。ここに、初期条件は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (v_0, w_0, \theta_0)(x) = (v_+, w_+, \theta_+), \quad \inf_{x > 0} v_0(x) > 0, \quad \inf_{x > 0} \theta_0(x) > 0$$

を満たすとします。この問題では、上記の 2×2 の系についての Case 1 のように、 v と θ を偶関数として、 w を奇関数として全空間に拡張することで、 $z_+ = (v_+, w_+, \theta_+)$ and $z_- = (v_+, -w_+, \theta_+)$.

としたときの、初期値問題 (8)-(10) に帰着されます。このとき、遠方の流速 w_+ が負であれば、対応する Euler 方程式に対する Riemann 解は衝撃波速度が $s_1 = -s_3$ であるような二つの衝撃波 $z_1^s(x - s_1 t)$ と $z_3^s(x - s_3 t)$ から構成され、また中継的な定数状態 z_m は $z_m = (v_m, 0, \theta_m)$ の形に与えられることが分かります。このようにして、 w_+ が負なら、 $z_3^{vs}(x)$ の小近傍において、初期値境界値問題 (16)-(18) の時間大域解が存在すると共に、あるシフト α_3 が定まり、解は境界から離れて行く粘性衝撃波 $z_3^{vs}(x - s_3 t + \alpha_3)$ に漸近して行くことが示されます。同様にして、遠方の流速 w_+ が正のときは、解が境界から離れて行く希薄波に漸近することを示すことが出来ます。これらの結果は、粘性気体の 2×2 の系に対する前述の [22] や [25] の結果の自然な拡張となっています。いま、境界条件 (18) を絶対温度についてはディリクレ型である

$$(19) \quad w(t, 0) = 0, \quad \theta(t, 0) = \theta_-, \quad (t > 0), \quad \theta_- > 0$$

に変更すると、対応する Riemann 解には特別な場合を除き接触不連続を必ず含むことが示されますので、少なくとも単一の粘性接触波の漸近安定性を境界条件 (19) の下で考察できなくてはなりません。しかしながら、この境界条件を満たす粘性接触波のうまい近似解の構成自体に困難があり、未解決な問題となっています。流速の境界条件が零でない、Inflow 問題や Outflow 問題では、事態はより複雑となり、単一の希薄波が境界から離れて行く場合のように、いかにも出来ても不思議でない場合を除けば、殆どの場合が未解決です。

6. 終わりに

終わりに、今後の問題として

- 上で述べた既存の未解決問題をどんなにじましい方法でも試みる
- 粘性気体の系で個別に得られた面白そうな結果を、可能な限り分かりやすい手法で一般系に拡張すること
- 粘性気体系の半空間の問題で、境界条件を物理的に興味ある場合に拡張すること（特に、ステファン問題との関連で境界上で化学反応や相転移がある場合や、ガス星との関連で真空と接する場合などの自由境界値問題等）
- 粘性気体系で、状態に真空を含む場合の弱解の漸近挙動を考えること
- 上で述べた全ての波の漸近安定性を多次元の中で考えること（もともと、一次元の解は多次元モデルでの平面波解）

を上げておきます。無論、これらについても一部の結果が最近得られていますが（文献に上げてないことご容赦ください）、殆どの場合がこれからの問題です。

以上、本講演で、圧縮性粘性流体の漸近挙動の世界に少しでも理解を持っていただける方が増えましたら幸いに思います。

終わりの終わりにですが、全般にわたる入門書として、早稲田大学西原健二氏との共著「非線形微分方程式の大域解 — 圧縮性粘性流の数学解析 —」（日本評論社、2004）をお買い求め頂ければ幸いです（まだ沢山売れ残っているそうです）。

References

- [1] J. Goodman: Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 95 (1986), 325-344.
- [2] I. Hashimoto, A. Matsumura: Large-time behavior of solutions to an initial-boundary value problem on the half line for scalar viscous conservation law, to appear in *Methods and Applications of Analysis*.
- [3] E. Hopf: The partial differential equations $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math.*, 3 (1950), 201-230.
- [4] F. Huang, J. Li, A. Matsumura: Stability of combination of viscous contact wave with rarefaction waves for 1-D compressible Navier-Stokes system, to appear.
- [5] F. Huang, A. Matsumura: Stability of a composite wave of two viscous shock waves for the full compressible Navier-Stokes equation, to appear.
- [6] H. Fuang, A. Matsumura, Z. Xin: Stability of contact discontinuities for the 1-D compressible Navier-Stokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 179 (2006) 55-77.
- [7] F. Huang, A. Matsumura, Z. Xin: Stability of a composite wave of viscous shock waves and viscous contact wave for compressible Navier-Stokes equation, to appear.
- [8] H. Fuang, T. Yang, Z. Xin: Contact discontinuity with general perturbations for gas motions, to appear.
- [9] A. M. Il'in, O. A. Oleinik: Asymptotic behavior of the solutions of Cauchy problem for certain quasilinear equations for large time (Russian), *Mat. Sbornik*, 51 (1960), 191-216.
- [10] N. Itaya: A survey on the generalized Burgers' equation with a pressure model term, *J. Math. Kyoto Univ.* 16 (1976), 223-240.
- [11] M. Kato: Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations, *Osaka J. Math.*, 44 (2007) 923-943.
- [12] S. Kawashima: Large-time behaviour of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* 106 (1987), 169-194.
- [13] S. Kawashima, A. Matsumura: Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion, *Comm. Math. Phys.*, 101 (1985) 97-127.
- [14] S. Kawashima, A. Matsumura, K. Nishihara: Asymptotic behavior of solutions for the equations of a viscous heat-conductive gas, *Proc. Japan Acad.*, 62, Ser. A (1986) 249-252.
- [15] S. Kawashima, S. Nishibata, M. Nishikawa: L^p energy method for multi-dimensional viscous conservation laws and application to the stability of planar waves, *J. Hyperbolic Differ. Eqn.*, 1 (2004), 581-603.
- [16] S. Kawashima, S. Nishibata, P. Zhu: Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space, *Comm. Math. Phys.*, 240 (2003), 483-500.

- [17] P. D. Lax: Hyperbolic systems of conservation laws II, *Commun. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 537-566.
- [18] T.-P. Liu.: “Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 56, 1985.
- [19] —: Pointwise convergence to shock waves for viscous conservation laws, *Commun. Pure Appl. Math.*, 50 (1997), 1113-1182.
- [20] C. Mascia, K. Zumbrun.: Stability of small-amplitude shock profiles of symmetric hyperbolic-parabolic systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 57 (2004) 841–876.
- [21] A. Matsumura: Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas, *Methods Appl. Anal.*, 8 (2001), 645-666.
- [22] A. Matsumura, M. Mei.: Convergence to traveling fronts of solutions of the p -system with viscosity in the presence of a boundary, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 146 (1999) 1–22.
- [23] A. Matsumura, K. Nishihara: On the stability of travelling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Jpn. J. Appl. Math.*, 2 (1985), 17–25.
- [24] —: Asymptotics toward the rarefaction waves of the solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Jpn. J. Appl. Math.*, 3 (1986), 1–13.
- [25] —: Global asymptotics toward the rarefaction wave for solutions of viscous p -system with boundary effect, *Quart. Appl. Math.*, 58 (2000) 69–83.
- [26] T. Nakamura, S. Nishibata, T. Yuge: Convergence rates toward the stationary solution for the compressible Navier–Stokes equation in half space, *Journal of Differential Equations*, 241 (2007), 94–111.
- [27] T. Nishida: Equations of motion of compressible viscous fluids, in “Pattern and Waves” edited by Nishida, T., Mimura, M., Fujii, H., Amsterdam, Tokyo: Kinokuniya/North-Holland, 1986, 97-128
- [28] A. Szepessy, Z. Xin.: Nonlinear stability of viscous shock waves, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 122 (1993) 53–103.
- [29] B. Riemann: Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (1860), in “Bernhard Riemann Collected Papers”, Edited by R. Narasimhan, Springer-Verlag, 1990.
- [30] K. Zumbrun: Multidimensional stability of planar viscous shock waves, in “Advances in the theory of shock waves”, 307–516, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2001.
- [31] —: Stability of large-amplitude shock waves of compressible Navier-Stokes equations, in “Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, III”, Edited by S.J. Friedlander, D. Serre, Elsevier, 2004.

メモ